М.Ш. Мамаюсупов

Каримов С.К.

Жогорку математика боюнча окума

2-бөлүк

Электрондук окуу китеп

- ФУНКЦИЯЛАР
- ФУНКЦИЯЛАРДЫН ПРЕДЕЛДЕРИ
- ФУНКЦИЯЛАРДЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ
- БИР ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИЯЛӨӨ
- КӨП ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИЯЛӨӨ

Ош-2018

УДК 51

ББК 22.11

Китеп Ош мамлекеттик университетинин«Жогорку математика» кафедрасында даярдалып, Билим берүү жана Илим минстирлигинин № 99|1 (24.02.12) буйругу менен расмий окуу китеби катарында таанылган.

Редактору: ардагер математик М.Абдижалилов

Рецензенттер: п.и.д, профессор Байсалов Ж.У.; ф.-м.и.д, профессор Асанов А.; ф.-м.и.к., доцент Алыбаев А.М.

Окумалардын топтомун жазган Мамаюсупов М. Ш.

М. 22 Жогорку математика боюнча окума (2 – бөлүк): Эелектрондук окуу китеби. – Ош: 2014, 2018.– 344 б.

«Жогорку математика боюнча окума» электрондук окуу китебинин 2 – бөлүгү, жогорку окуу жайларда окутулуучу матанализ, жогорку жана колдонмо математика сабактарын өздөштүрүүчү студенттерге жана окутуучуларга арналган. электрондук китепти ОшМУ нун жана www.okuma.kg сайттарынан окууга болот.

Сын – пикирлерди төмөндөгү дарекке жөнөтүңүздөр:

723500, Ош ш., Ленин к., 331,

ОшМУ нун жогорку математика кафедрасы.

Электрондук дарек: mamaiusupov.m@gmail.com

М 1602010000 – 11 УДК 51

ISBN 978 – 9967 – 23 – 383 - 4 ББК 22.11

ЛАТЫНАЛФАВИТИ

Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы
A a	а	*H h*	аш	*N n*	эн	*U u*	у
B b	бэ	*I i*	и	*O o*	о	*V v*	вэ
C c	це	*J j*	йот	*P p*	пэ	*W w*	дубль-бэ
D d	дэ	*K k*	ка	*Q q*	ку	*X x*	икс
E e	э	*L l*	эль	*R r*	эр	*Y y*	и́грек
F f	эф	*M m*	эм	*S s*	эс	*Z z*	зэт
G g	гэ			*T t*	тэ		

ГРЕК АЛФАВИТИ

Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы	Тамгалар	Аталышы
$A \quad \alpha$	а́льфа	$\mathrm{H} \quad \eta$	таэ	$\mathrm{N} \quad \nu$	ню	$\mathrm{T} \quad \tau$	та́у
$B \quad \beta$	бе́та	$\theta \quad \vartheta$	татэ	$\Xi \quad \xi$	кси	$\Phi \quad \varphi$	фи
$\Gamma \quad \gamma$	га́мма	$I \quad i$	таио	$O \quad o$	о́микрон	$\mathrm{X} \quad \chi$	хи
$\Delta \quad \delta$	де́льта	$K \quad \kappa$	ка́ппа	$\Pi \quad \pi$	пи	$\Psi \quad \psi$	пси
$E \quad \varepsilon$	эпсилон	$\Lambda \quad \lambda$	ла́мбда	$P \quad \rho$	ро	$\Omega \quad \omega$	оме́га
$Z \quad \zeta$	дзе́та	$M \quad \mu$	мю	$\Sigma \quad \sigma$	си́гма		

МАЗМУНУ

Оглавление

Аалам бир чоң ыйык китеп жана ал математиканын тилинде жазылган, анын тамгалары математикалык белгилер, фигуралар болушуп, аларсыз ааламды адам тилинде түшүнүү мүмкүн эмес.

Галилей

VI – ГЛАВА. ФУНКЦИЯЛАР

§ 6.1 Функцияларды аныктоо

6.1.1 Чагылтуу аппараттарын түзүү

I. Чагылтуу түшүнүгү. Чөйрөдө болуп жаткан анча тааныш эмес кубулуштарды жана окуяларды, өзүбүзгө тааныш көптүктөрдүн элементтерине тиешелеш коюп, салыштырып үйрөнүү мүмкүнчүлүгүн түзгөн мыйзам - эрежелер, математикада чагылтуу аппараты же амалы катарында түшүндүрүлүп келет. Чагылтуу аппараттарынын жардамы менен кубулуштарды үйрөнүүдө чоң катачылыктарга жол бербөө үчүн, чагылтуу эрежесине **негизги шарт** коюлат. Айталы F чагылтуу эрежеси X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтсын дейли, анда F чагылтуусуна *“ X көптүгүнүн ар бир* x *элементине, Y көптүгүнөн бирден гана* y *элементин тиешелеш коёт”*– деген **негизги шарт** коюлат.

Чынында эле X көптүгүндөгү бир x кубулушуна (элементине), Y көптүгүндөгү $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ сыяктуу ар түрдүү көп маанидеги элестер (элементтер) тиешелеш коюлса, анда x кубулушун

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ элестеринин кайсы бирине салыштырып үйрөнөрүбүз белгисиз болуп калат. Бул учурда чагылтуу аппаратын таанып билүү каражаты катарында колдонуумүмкүн эмес. Ошондуктан **негизги шартты** канааттандырган чагылтууларга гана токтолуп, таануу процессинде аларды сезилбес ката кетирүүчү математикалык таануу каражаты катарында колдонуп келебиз. Мындан ары чагылтуу деп, **негизги шартты** канааттандырган чагылтууларды гана түшүнөбүз.

Мындай чагылтуулар эки түргө бөлүнүшөт:

1. Өз ара бир маанилүү чагылтуулар. Бул чагылтууда X көптүгүнүн ар бир x элементинин жалгыз өзүнө гана тиешелеш коюлган, Y көптүгүнөн бирден гана y элементи табылат жана тескерисинче Y көптүгүндөгү ар бир y элементинин жалгыз өзүнө гана тиешелеш коюлган, X көптүгүндө да бирден гана x элементи болот. Бул учурда эки көптүктөрдүн элементтеринин арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотулуп,Y көптүгүн X көптүгүнө тескери чагылтуу да орун алып, ал да **негизги шартты канааттандырат.** **А**йталы F өз ара бир маанилүү чагылтуу болсун, анда ага тескери болгон чагылтууну F^{-1} деп белгилеп, символикалык

$F\colon\ X \to Y$, $F^{-1}\colon Y \to X$ же $X \overset{F}{\leftrightarrow} Y$ белгилөөлөр аркылуу жазабыз.

2. Бир тараптуу бир маанилүү чагылтуулар. Чагылтылган тараптан гана бир маанилүү болгон чагылтуулар да **негизги шартты** канааттандырышып, таанып билүү практикасында колдонууга жарамдуу болушат. Анткени мындай чагылтууда X көптүгүндөгү ар түрдүү $x_1, x_2,\ x_3,\ \dots, x_n$ (элементтерине) кубулуштарына, Y көптүгүнөн бирден гана y_i элементи тиешелеш коюлуп, ар башка x_i *кубулуштарын* $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$ элестери, бир гана y_i ге чагылганы менен, аларды элестери окшош же теңдеш кубулуштар катары адаштырбай таанууга болуп, **негизги шарт** бузулбайт. Бирок, бул учурда тескери F^{-1} чагылтуусу **негизги шартты** канааттандырбайт, анткени тескери чагылтууда бир эле y_i кубулушунун бир канча x_i сыяктуу элестери болуп, алардын кайсынысын y_i кубулушун элеси деп тандаарыбызды билбейбиз. Демек, бир тараптуу бир маанилүү чагылтуулардын тескериси каралбайт же жашабайт деп айтылат.

Математикада чагылтылып жаткан оргинал көптүктөр менен алардын элес көптүктөрүнүн түзүлүү структурасына (табыятына) карап, чагылтууларга өз – өзүнчө аттар берилет.

▪ Сан көптүктөрүн сан көптүктөрүнө чагылтуучу эреже - мыйзамдар **функция** деп аталышат.

▪ Сандардан башка ар кандай элементтерден турган көптүктөрдү, сан көптүктөрүнө чагылтуучу эреже – мыйзамдар **функционал** деп аталышат.

▪ Сандардан башка ар кандай элементтүү көптүктөрдү, өз ара бири – бирине чагылтуучу эреже – мыйзамдарды **оператор** деп коюшат.

Жалпы учурда, чагылтууну кеңири мааниде оператор деп атоого да болот, анткени жалпы учурда сан көптүктөрү деле ар кандай элементтүүкөптүктөрдүн бири болот. Бирок көбүнчө чөйрөнүү йрөнүү процесси сандарга салыштырылып таанылгандыктан, алардагы чагылтууларды функционал менен оператордон айырмалап функция депатайбыз.

Мисалдар

1. Токтогул ГЭСинин суу көлмөсүндө топтолгон суунун көлөмүн аныктоо үчүн, атайын ченөө эрежеси киргизилген. Ал үчүн көлмөнүн түбүнөн жогору карай, R чыныгы сандарынын көптүгүнөн алынган 0 санынан баштап, 19,7 миллиард санына чейинки сандар жазылган сызыктар менен белгиленген мамы-ченегич орнотулган. Суунун ченегичтеги сан жазылган сызыкка тийүүсүнө карап, суунун көлөмү аныкталат.

Ошентип таанууга татаал болгон көлмөдөгү суунун көлөмдөрүнүн көптүгүн, атайын курулган ченегич эреже – мыйзамынын жардамы менен суунун көлөмдөрүн көптүгүн, R сандарынын $[0\ ,\ 19{,}7\,млрд.]$ сегментине чагылтып аныктайбыз. Бул чагылтууда, көлөмдөр көптүгү сан көптүгүнө чагылтылгандыктан, ченегич эрежесин функционал деп эсептөөгө болот. Алөз ара бир маанилүү функционал болуп, тескериси жашайт. Анткени ченегичтеги ар бир санга бир гана суу көлөмү туура келет (жана тескерисинче).

2. Векторлорду скалярдык көбөйтүү эрежесине таянып, каалагандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ эки түгөй векторлордон турган көптүктү, R чыныгы сандарына чагылтууну ишке ашырууга болот.

Чынында эле, скалярдык көбөйтүү эрежеси боюнча

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \alpha \in$ R болгондуктан, векторлордун ар бир $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ түгөйүнө, бир гана α чыныгы саны ($\alpha \in$ R) туура келип, эки өзгөрүлмө векторлордун түгөйүн сан көптүгүнө чагылдырган функционал $\{\vec{a}, \vec{b}\} \rightarrow \alpha$ келип чыгат. Бул эреже менен ишке ашырылган функционалдын тескериси жашабайт же тескериси колдонууга жараксыз болот, анткени скалярдык көбөйтүндүлөрү тең болушкан көптөгөн түгөй векторлорду табууга болот. Ошондуктан скалярдык көбөйтүү, эки өзгөрүлмө векторлордун түгөйүн бир чыныгы санга чагылтуучу, бир тараптуу бир маанилүү функционал гана боло алат.

3. Адамдын колу менен жасалган таразаны эреже – мыйзам катарында кабыл алып, өндүрүлгөн түшүмдөрдүн өлчөмдөрүнүн көптүгүн чыныгы сандарга салыштырып, үйрөнүүгө болот.

Чынында эле, айдоо аянттарынан жыйналган ар түрдүү өсүмдүктөрдүн түшүмдөрү жөнүндө жеткиликтүү маалымат алуу үчүн, аларды таразага тартып, чыныгы сандарга чагылтып салыштырып көрөбүз. Таразанын таблосуна чыккан санга карап, өсүмдүктөрдүн түрүнө жараша, кайсы талаадан кандай түшүм алганыбызды аныктап тааныйбыз. Натыйжада “тараза” эрежеси түшүмдөрдүн көптүгүн чыныгы сандарга чагылтуучу функционал экендигин баамдайбыз. Бул бир тараптуу бир маанилүү функционал болот, анткени анын тескерисин таануу процессинде бир мааниде түшүнүү мүмкүн эмес. Себеби ар кандай айдоо талааларынан алынган, ар башка өсүмдүктөрдүн түшүмдөрү бирдей болуп калган учурда, алардын баары бир чыныгы санга туура келгендиктен, ал чыныгы сан боюнча кайсыл айдоо талаасындагы, кандай өсүмдүктөрдүн түшүмү жөнүндө сөз болуп жаткандыгын толук биле албайбыз.

4. Вектордук көбөйтүү эрежеси боюнча, каалагандай түгөй $\vec{a}\,,\vec{b}$ векторлорунун көптүгүн, кандайдыр бир $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ векторлорунун көптүгүнө чагылтууга болот $\{\vec{a}\,,\vec{b}\} \rightarrow \{\vec{c}\}$.

Чынында эле, вектордук көбөйтүүнүн эрежесине ылайык, бир тегиздикте жатышкан каалагандай $\vec{a},\vec{b}$ түгөй векторлору менен оң үчтүктү түзүп, аларга перпендикуляр жайгашкан $\vec{c}$ векторунун арасында бир тараптуу гана бир маанилүү тиешелештикти орнотуу мүмкүн, анткени вектордук көбөйтүндүлөрү барабар болгон көптөгөн түгөй векторлор болгондуктан, тескери чагылтуу **негизги шартты** канааттандырбайт. Мындай чагылтуу: түгөй векторлордун көптүгүн, векторлордун көптүгүнө чагылткан, бир тараптуу бир маанилүү оператор болуп эсептелет.

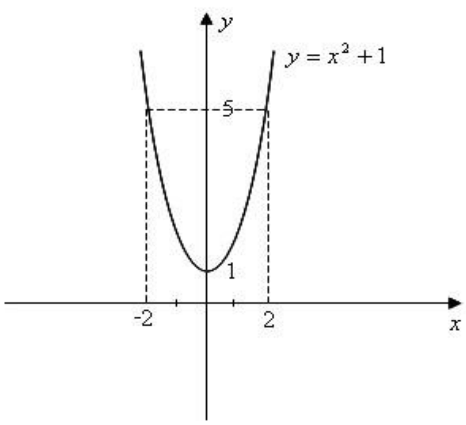
5.F(x) $=\int f(x)dx + C$ анык эмес интегралын эсептөө эрежесинин жардамы менен, ар кандай үзгүлтүксүз $f(x)$ функцияларын турактуу санга чейинки тактыкта F(x) – C функцияларына чагылтууга болот. Мында

C $-$ $constanta$ (каалагандай турактуу сан). Ошентип, бул чагылтуу функцияларды функцияларга $\{f(x)\} \leftrightarrow \{F(x) - C\}$ турактуу санга чейинки тактыкта, өз ара бир маанилүү чагылтуучу оператор болот.

Ошентип чагылтуу, таанып билүү процессинде керектөөгө жараша колдонулган айла – амалдардын бири болуп, математикалык чагылтуу аппаратын аныктаган эреже – мыйзамдар катарында, ойлоп табуу изденүүчүлүк процессинде, улам өнүгүп кете бермекчи.

6.1.2Функция жана аны түзүү жолдору

Функция кыргызча өз ара көз карандылык байланыш деген маанини түшүндүрүп, эки сан көптүктөрүнүн арасындагы чагылтуунун жардамы менен орнотулган көз карандылык байланышты аныктаган эреже – мыйзам катарында кабыл алынат. Негизги шартты канааттандырган чагылтуу аппаратынын, сандык көптүктөрдү бири – бирине чагылтуучу каражат катарында каралуучу функция түшүнүгү, чөйрө таануу процессинде кеңири колдонушка ээ болгондуктан, ага өзүнчө аныктама бере кетели.



6.1 – чийме

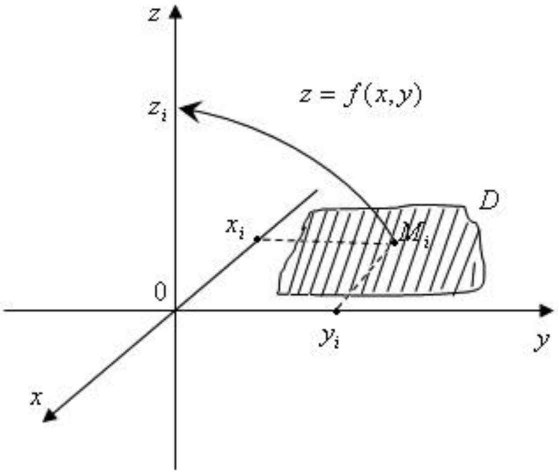
- **Функциянын аныктамасы:**

Айталы X жана Y сан көптүктөрү берилсин дейли. Эгерде кандайдыр бир f эреже – мыйзамы жашап, анын жардамы менен X көптүгүн ар бир x элементине (санына), Y көптүгүнөн бирден *гана у элементин (санын) тиешелеш коюучу байланышты орнотуу мүмкүн болсо, анда f эреже – мыйзамын X көптүгүндө аныкталган функция деп айтабыз.*

Функцияны $y = \mathrm{f}(x)$ символу менен белгилеп: “игрэк барабар эф икстен” – деп окуйбуз (орусчасы эф от икс). Бул жазылыш “эф икстен көз каранды” – деген сөздүн кыскача белгилениши катарында кабыл алынган. Анткени эркин тандалган x ке карата, ага тиешелеш коюлган y элеси аныкталгандыктан, x ти көз карандысыз чоңдук же функциянын аргументи, ал эми y ти көз каранды чоңдук же функциянын мааниси деп атайбыз. Ошентип, X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтуучу $y = \mathrm{f}(x)$ функциясы, бул эки көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланышты орнотуучу эреже – мыйзам болуп эсептелет. X көптүгү функциянын аныкталуу областы, Y көптүгү функциянын өзгөрүү областы деп аталышат. Функцияны f тамгасынан башка каалагандай чоң же кичине латын, орус, кыргыз тамгалары менен белгилей берүүгө болот. Бирок, анын аргументин жана маанисин кичине тамгалар менен белгилеп келебиз. Мисалы $y = \ell(x)$, $y = \mathrm{g}(z)$, $y = \mathrm{a}(l)$, $u = F(t, \mathrm{a}, \mathrm{c})$ ж.б.у.с.

Мисалы “Берилген санды квадратка көтөрүп, бирди кош” эреже – мыйзамы менен $y = x^2 + 1$ көрүнүштө жазылган квадраттык функция $X = R \equiv]-\infty, +\infty[$ чыныгы сандарынын көптүгүн

$\mathrm{Y} = R_1 \equiv [1, +\infty[$ арлыгындагы сандардын көптүгүнө бир тараптуу бир маанилүү чагылтат. Анткени анын тескери чагылтуусу $x = \pm\sqrt{y-1}$ эрежеси менен жүргөндүктөн, бир y санына эки $\pm x$ сандары тиешелеш коюлуп, чагылтуунун негизги шарты аткарылбайт. Чынында эле X көптүгү деп Ox огун, Y көптүгү деп Oy огун алып, берилген функцияны декарттык координаталар системасында графикте көрсөтсөк (6.1 - чийме), анда бүтүндөй Ox огундагы чекиттер, Oy

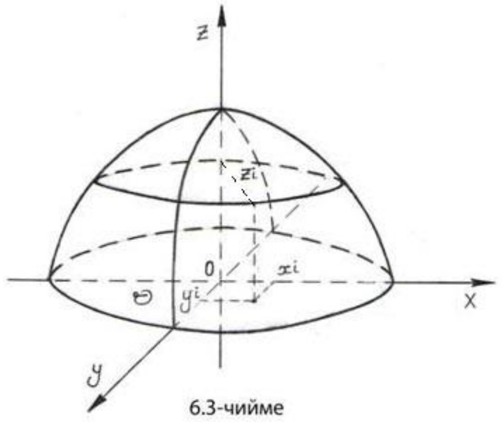


6.2 – чийме

огунун оң бөлүгүндөгү $[1\,,\ +\infty[$ жарым сегменттин чекиттерине бир маанилүү чагылганын көрөбүз. Мында$x_1 = -2$ саны бир гана $y_1 = 5$ санына , $x_2 = 2$ саны да бир гана (жалгыз) $y_2 = 5$ санына чагылып, **негизги шарт** же бир маанилүүлүк сакталат. Бирок тескери Y →X чагылтуусу аткарылбайт, анткени Y көптүгүндөгү бир $y = 5$ саны, X көптүгүндөгү эки $x_1 = -2,\ x_2 = 2$ сандарына чагылып, 5 санын чагылгандан кийинки элеси катарында “-2, 2” сандарынын кайсынысын алуу керек экендиги белгисиз кала берет. Ошондой болсо да мындай эки маанилүүлүктү, X= $]-\infty,\ +\infty[$ аралыгын $X_1 =]-\infty,\ 0]$ жана $X_2 = [0,\ +\infty[$ эки аралыктарына бөлүү менен жоюуга болот. Ал үчүн $y = x^2 + 1$ функциясын $X_1 \leftrightarrow Y$ жана $X_2 \leftrightarrow Y$ өз ара бир маанилүү чагылтууларын, өз өзүнчө ишке ашыруучу эки башка функциялар катарында түшүнүү керек. Бул эки башка функциялар өздөрүнчө ар бир белгиге карата $x = -\sqrt{y+1}$ жана $x = +\sqrt{y+1}$ эки тескери функцияларга ээ болушат.

Эгерде X, Y көптүктөрү бир өлчөмдүү (сызыктуу) R мейкиндигинде жайгашышса (X,Y $\subset R$), анда $y = f(x)$бир өзгөрүлмөлүү функция деп аталат.Ал эми Y сызыктуу R мейкиндигинде жайгашканы менен:

1. X көптүгү (областы) эки өлчөмдүү R^2 тегиздигинде болсо (X$\subset R^2$), эки өзгөрүлмөлүү функция (1 – бөл., §1.2 ни кара);
2. X областы үч өлчөмдүүR^3 мейкиндигинде жайгашса (X$\subset R^3$), үч өзгөрүлмөлүү функция;

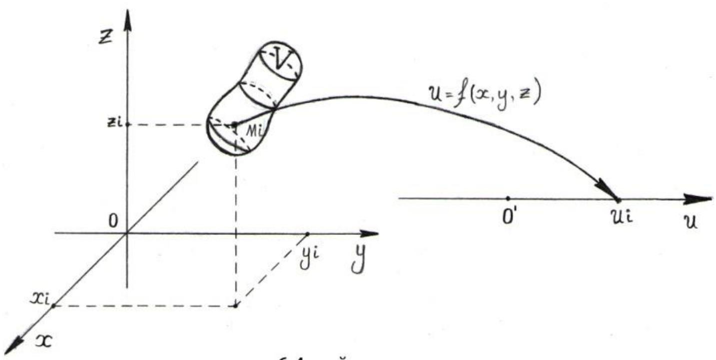


6.3-чийме

3. Жалпы учурда X$\subset R^n$ болсо, анда n өзгөрүлмөлүү функция

деп аталышат.Жогорудагы мисалда бир өзгөрүлмөлүү $y = x^2 + 1$ функциясы каралган.

Эки өзгөрүлмөлүү функциянын чагылтуу механизмин, үч өлчөмдүү декарттык координаталар системасында көрсөтөлү (6.2 – чийме). Чагылуучу көптүк (область) катарында Oxy тегиздигинде жайгашкан D областын, ал эми D областынын чагылткандан кийинки элеси деп, Oz аппликата огундагы чекиттерди (R сандарын) алалы. $D \subset R^2$болгондуктан, анын ар бир M чекити $(x; y)$ координаталарына ээ, ошондуктан бул областта аныкталган функция же чагылтуу эреже – мыйзамы $z = f(M) = f(x, y)$ көрүнүштө жазылат. Чагылтуунун жүрүшү D областындагы ар бир $M_i(x_i; y_i)$ чекитине, Oz огунан бир гана z_i чекитин тиешелеш коюу аркылуу ишке ашырылат.

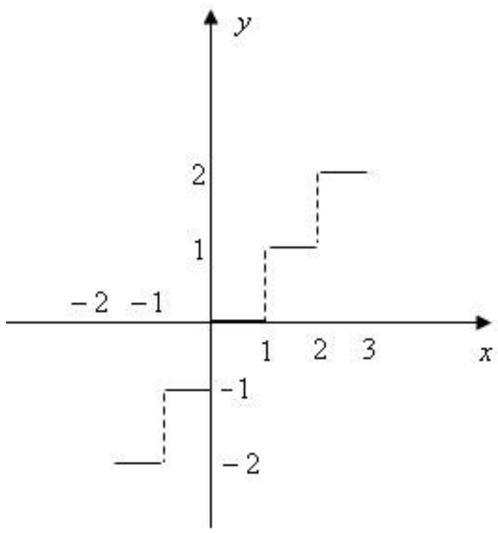


6.4-чийме

Ал эми $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы, Oxy тегиздигиндеги борбору O чекити, радиусу r =1 болгон тегеректин ичин элестеткен D = $\{ (x, y) : x^2 + y^2 < 1, (x, y) \in R^2\}$ областын, Oz огунда жайгашкан $[0 , 1]$ сегментиндеги чыныгы сандарга чагылтып, 6.3 - чиймеде элестетилген бетти сүрөттөйт.

Үч өзгөрүлмөлүү функция R^3 мейкиндигинде жайгашкан обьекттерди (областтарды), R чыныгы сандарына чагылдырат. Чагылуучу область V десек, анын чекиттери $M(x ; y ; z)$ үч координаталарына ээ болгондуктан, чагылтуу эреже – мыйзамы болгон үч өзгөрүлмөлүү функцияны $u = f(M) = f(x, y, z)$ көрүнүштө жазууга болот. $Oxyz$ үч өлчөмдүү декарттык координаталар системасында жайгашкан V областынын чагылтылгандан кийинки элеси – чыныгы сандар болгондуктан, аларды башка бир $O'u$ чыныгы сандарынын огунда сүрөттөп, үч өзгөрүлмөлүү функцияны V областынын ар бир $M_i(x_i; y_i; z_i)$ чекитин, $O'u$ сан огундагы бирден гана u_i чекитине тиешелеш коюучу механизм катарында элестетебиз (6.4 – чийме). Жалпы учурда R^n мейкиндигинде жайгашкан V областындагы ар бир M чекитинин n сандагы координаталарын $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ десек, анда n өзгөрүлмөлүү функцияны

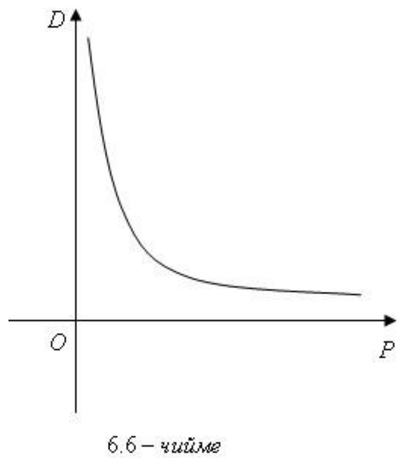
$u = f(M) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ көрүнүштө жаза алабыз. Бул чагылтуу эреже – мыйзамы болгон n өзгөрүлмөлүү функция, V областын R чыныгы сандарынын көптүгүнө тиешелеш коюучу көз карандылык байланышты орнотот. Кээде жазылуу ыңгайына карап, V областынын чекиттерин n координаталуу $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ көрүнүштө деп ойлоп, n өзгөрүлмөлүү функцияны $y = f(x)$ түрүндө жаза беребиз. n =2 болсо $y = f(x)$ же $y = f(x_1, x_2)$; $n = 3$ болсо $y = f(x)$ же $y = f(x_1, x_2, x_3)$ ж.б.у.с. Ошентип канча өзгөрүлмөлүү функция болсо да, аныкталуу областы (чагылуучу область) көп өлчөмдүү болгону менен, өзгөрүү областы (чагылтылгандан кийинки элеси) бир өлчөмдүү R мейкиндигиндеги сандар болушуп ($y \epsilon R$), көп ченемдүү мейкиндиктеги абалдарды кадимки чыныгы сандарга салыштырып үйрөнүүчү математикалык аппарат болуп эсептелишет.



6.5 – чийме

Функцияларды түзүү ыкмалары

◦ **Аналитикалык ыкма.** Бул ыкмада X жана Y көптүктөрүнүн арасындагы көз карандылык байланыштар, эреже – мыйзам катарында эсептелген формулалар аркылуу ишке ашырылат.



6.6 – чийме

Мисалы $y = sinx$, $u = (yz)^3 + \frac{\sqrt{x}}{y^2 - x}$.

◦**Кара сөз жүзүндөгү ыкма.** Айрым учурларда функцияны формула менен берүүгө мүмкүн болбой, ага кошумча кара сөз менен түшүндүрмө берүүгө туура келет. Айрыкча жаңы формулаларга сөзсүз кара сөздүү баяндамалар жазылат. Мисалы x санына, анын бүтүн бөлүгүн тиешелеш коюучу көз карандылык байланышын, формула менен жазып көрсөтө албайбыз. Ошондуктан ага

$y = [x] = \mathrm{E}(x)$ (“x тин бүтүн бөлүгү” – деп окулат),көрүнүштөгү түшүндүрмө кара сөздү коштоп жазабыз. Бул функциянын графиги тепкичтүү көрүнүштө болот (6.5 – чийме).

◦ **Графиктик ыкма.** Эки көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык эреже – мыйзамдарын чийилген графиктер аркылуу орнотууга да болот.Мисалы адамдын жүрөгүн иштөө ыргагы кардиограмма сызыгы менен аныкталып, врач ошол сызыкка карап жүрөктүн абалын баалайт. Иш жүзүндө жүрөктүн иштөө абалдарынын көптүгү менен, кардиограмма сызыгында көрсөтүлгөн өлчөм сандардын арасында тиешелештик же көз карандылык байланышты аныктоочу функция орнотулган болот. Ошондой эле экономикалык көрсөткүчтөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарды (функцияны) графикте көрсөтүү ыңгайлуу. Мисалы D – керектөөлөрдүн көптүгү менен, Р өндүрүлгөн товарлардын көптүгүнүн арасындагы көз карандылык байланыштарын 6.6 – чиймедеги графикте көрсөтүү менен, товарлардын саны көбөйгөн сайын, аны керектөө азайарын дароо

Жыл / Товар	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**
Сүт(тонна)	**57**	**56,8**	**56,9**	**62**	**63**	**74**
Эт(тонна)	**20**	**15**	**18**	**21**	**22**	**23,8**

байкайбыз.

◦ **Таблицалык ыкма.**Бул ыкма менен чектүү сандагы элементтери бар көптүктөрдүн арасындагы көз карандылык байланыштарды орноткон функцияларды берүү ыңгайлуу. Мындай учурда функцияны эч бир универсалдуу формулада, кара сөздө, графикте берүү мүмкүнчүлүктөрү болбой калат же ыңгайсыз болушу мүмкүн. Мисалы беш жылдык ичинде фермада өндүрүлгөн товарлардын түрлөрүнүн көлөмдөрүн формула менен көрсөтүү мүмкүн эмес, же графикте көрсөтүү ыңгайсыз. Ошондуктан, аны таблицада гана көрсөтө алабыз:

Бул таблицада (*жылдар*) =f(*товар*) = f(*сүт, эт*) көрүнүштөгү эки өзгөрүлмөлүү функция көрсөтүлгөн.

◦ **Айкын эмес көрүнүштө жазуу ыкмасы.** Функцияларды аналитикалык ыкмалар менен жазууда x, y өзгөрүлмөлөрүн бири – бири менен айкын туюнтуу татаал болгон учурлар кездешет. Мисалы

$x^3 \cdot siny = e^{xy} - 1$ теңдештигинен x ти же y ти табуу, же бири – бири менен айкын туюнтуу кыйын. Мындай туюнтма көрүнүштөгү эреже – мыйзамдар менен берилген эки өзгөрүлмөлөрдүн көз карандылыгын, $F(x, y) = 0$ көрүнүштө жазып, аны айкын эмес көрүнүштө берилген функция деп айтабыз. Айкын берилген бир өзгөрүлмөлүү функцияны да $y = f(x) \Leftrightarrow f(x) - y = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = 0$ айкын эмес көрүнүштө жазууга болот. Мисалы, жогорудагы теңдештик менен берилген эки x, y өзгөрүлмөлөрүнүн арасындагы көз карандылык байланышты,

$F(x, y) \equiv x^3 \cdot siny - e^{xy} + 1 = 0$ көрүнүштөгү айкын эмес функция деп эсептейбиз. Ошондой эле айкын көрүнүштө берилген бир өзгөрүлмөлүү $y = x^4 - 7$ функцияны да, $F(x, y) \equiv y - x^4 - 7 = 0$ көрүнүштөгү айкын эмес формада жаза алабыз. Ошентип эки өзгөрүлмөлүү функцияны $F(x, y, z) = 0,$ үч өзгөрүлмөлүү функцияны $F(x, y, z, t) = 0,$ ж.б. у. с. n өзгөрүлмөлүү функцияны $n + 1$ өзгөрүлмөлүү $F(u, x_1, x_2, x_{3,} \dots, x_n) = 0$ көрүнүштөгү айкын эмес функция катарында жазууга болот.

◦ **Параметрдик ыкма менен берүү.** Функцияны аналитикалык ыкмада берүүнүн дагы бир көрүнүшү катарында, параметрдик жол менен берилген функцияларды айтууга болот. Бул учурда $y = f(x)$ функциясындагы $x \in X,\ y \in Y$ өзгөрүлмөлөрдүн экөөсү тең, үчүнчү бир башка өзгөрүлмөдөн көз каранды болушат. МисалыR^2 тегиздигинде кыймылдап бара жаткан $(x; y)$ координаталуу чекит, t убактысынын ар бир ирмемимде өзгөрүп, t убактысынан көз каранды $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\quad t \in$ T болот. Ошентип убакыттын кайсы бир T аралыгында кыймылда болгон чекит координаталары менен гана мүнөздөлбөстөн, параметр (бул жерде убакыт) деп аталган t өзгөрүлмөсүнө да байланыштуу болот. Мында t параметри T аралыгында өзгөргөн кезде, x, y өзгөрүлмөлөрү тиешелүү түрдө $X,\ Y$ көптүктөрүнүн чегинен чыгып кетпейт деп эсептелет. Мисалы,

$x^2 + y^2 = 16$ айланасында жаткан ар бир $(x;y)$ чекити, t параметри (бурчу) менен$\begin{cases} x = 4\cos t\,, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ көз карандылык байланышында болот жана t көрсөтүлгөн аралыкта өзгөргөн учурда: $x \in X = [-4,+4\,]$, $y \in Y = [-4,+4\,]$ көптүктөрүнүн чегинен чыгып кетпейт.

Эскертүү: Жогоруда функцияларды декарттык координаталар системасында түзүү ыкмалары каралды. Ал эми функцияны полярдык же башка координаталар системасында түзүү талап кылынса, анда §1.3 , 1 – бөлүктө көрсөтүлгөн байланыштар эске алынат.

1. Мисалдар

1. $y = arcsin\sqrt{x-1}$ функциясынын аныкталуу жана өзгөрүүобластын тапкыла.

Чыгаруу:► $siny = \sqrt{x-1}$ болгондуктан, $|siny| \leq 1$шартынага тең болгон$\left|\sqrt{x-1}\right| \leq 1$ барабарсыздыгы менен алмаштырабыз. Экинчи жактан, оң сандан гана квадраттык тамыр чыккандыктан, $x - 1 \geq 0$ болушу керек. Бул эки талапты бириктирсек:$\begin{cases} x - 1 \leq 1, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$болуп,$1 \leq x \leq 2$ келип чыгат. Ал эми y болсо $Y =]-\infty\,,+\infty[$аралыгындагы маанилерди кабыл алат. Демек берилген функциянын аныкталуу областы $\mathrm{X} = [1\,,2]$, өзгөрүү областы$Y =]-\infty\,,+\infty[$ аралыктары болушат. ◄

2. ▪ Турактуу температура кезинде, поршендүү идиште кысылган идеалдык газдын Р басымы мененV көлөмүнүн арасында Бойль – Мариоттун законуна ылайык,$\mathrm{P} \cdot V = \mathrm{C} - constanta$ көз карандылык байланышы орун алат. Аны

$$P = \frac{C}{V} = \mathrm{P}(V) \text{ жана } V = \frac{C}{P} = V(P) \qquad (6.1)$$

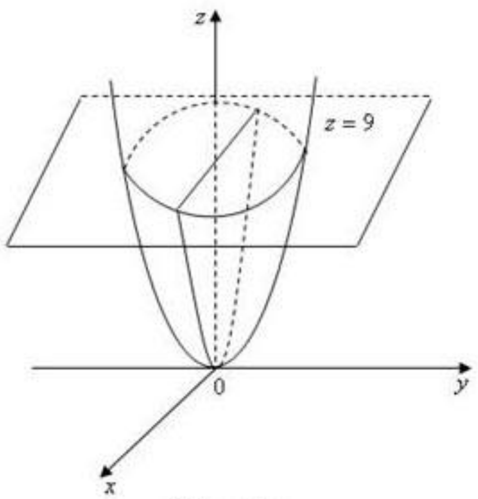
көрүнүштөрүндө жазып, басымдардын көптүгүн көлөмдөрдүн көптүгүнө жана тескерисинче эки тараптан теңөз ара бир маанилүү чагылтуучу (6.1) эреже – мыйзамдарын алабыз. Басымдар менен көлөмдөрдүн сандык чендери чагылтылып жаткандыктан, (6.1)ди оператор дебей,бирөзгөрүлмөлүү функция деп атайбыз. ▪

3.▪ Поршенде кысылган газдын массасынын температурасы турактуу эмес болгон учурда, анын көлөмүV менен Р басымынын, Т – абсалюттук температурасынын арасындагы байланыш Клапейрондун формуласы боюнча $\mathrm{P}\cdot V = R\mathrm{T}$ $(R = const.)$ көрүнүшүндө жазылат. Эгерде V менен Т ны көз карандысыз чоңдуктар деп ойлосок, анда басымды $\mathrm{P} = \frac{R\mathrm{T}}{V} = \mathrm{P}(V, \mathrm{T})$ эки өзгөрүлмөлүү функция деп түшүнүүгө болот. ▪

4. ▪ Кесилген конустун V көлөмүн, анын эки негиздеринин радиустарыR,rжана бийиктиги hөзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды деп,

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2) = V(R, r, h)$үч өзгөрүлмөлүү функция катарында кароого болот. ▪

5.▪ Кайсы бир телонунR^3 мейкиндигиндеги физикалык абалына байкоо жүргүзүп жатып, алардын бир чекиттен экинчи чекитке которулуп жатканда касиеттеринин өзгөрүлөрүн байкайбыз (Мисалы тыгыздыгы, температурасы, электр талаасынын потенциалы ж.б.у.с.). Ошондуктан бул физикалык абалдарды ошол чекиттердинx, y, z координаталарына карата үч өзгөрүлмөлүү функция деп түшүнүүгө болот. Кээде физикалык абалдар төртүнчү бир t убакыт чоңдугунан да көз каранды болгондуктан, жалпы учурда аларды $x, y, z,$ t төрт өзгөрүлмөлөрдөн функция деп эсептөөгө болот. ▪



6.7 – чийме

6. $z = x^2 + y^2$ функциясын аныкталуу жана өзгөрүү областтарын аныктап, z = 9 деңгээл сызыгын көрсөткүлө.

Чыгаруу: ► Каалагандай эле чыныгы сандарды квадратка көтөрүп кошууга болгондуктан, функциянын аныкталуу областы бүтүндөй R^2 тегиздиги болот. Ал эми өзгөрүү областы $\mathrm{Z} = [0, +\infty[$ аралыгындагы чыныгы сандар болушат. $z = 9$ маанисине туура келген деңгээл сызыгы $9 = x^2 + y^2$ теңдемеси менен берилген, радиусу $r = 3$, борбору Ozогунун $z = 9$ чекитинде жайгашкан айлана болот. Ал айлана $z = x^2 + y^2$ теңдемеси менен берилген гиперболалык параболоиддин, $z = 9$ тегиздиги менен кесилишүүсүнөн келип чыгат (6.7 - чийме). ◄

7. $u = \frac{z+1}{x^2-y^2}$ үч өзгөрүлмөлүү функциянын аныкталуу областын тапкыла.

Чыгаруу: ► Бөлчөктүн бөлүмүндөгү туюнтма $x^2 - y^2 \neq 0$ болгондуктан, $x - y \neq 0$ жана$x + y \neq 0$ шарттары коюлат. Бөлчөктүн алымындагы zөзгөрүлмөсүнө эч кандай шарт коюлбагандыктан, аныкталуу областы болуп, R^3 мейкиндигиндеги $x \neq \pm y$ шартын канааттандырган бардык чекиттердин көптүгү ($x = \pm y$ түзүндө жатпаган чекиттер) эсептелет.◄

8. Эгерде металл стержень $T = 0^0$ температурада l_0 узундугуна ээ болуп, аны $T = \theta^0$ градуска ысыткан кезде, l узундугуна ээ болсо, анда стержендин узаруу процессин мүнөздөгөн сандардын$\{l\}$ көптүгү менен, $[0^0, \theta^0]$ сегментиндеги температураны мүнөздөгөн сандардын арасындагы өз ара бир маанилүү көз карандылык байланышын

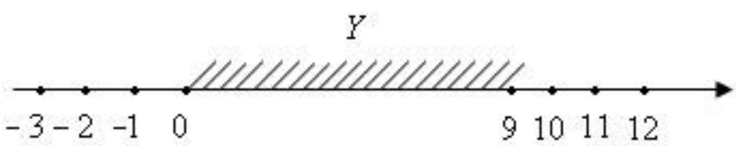
$l = l_0(1 + \beta\theta) = l(\theta)$ бир өзгөрүлмөлүү функция катарында көрсөтүүгө болот.

9.Үч бурчтуктун бир чокусунан чыкканa жана b жактары турактуу болуп, алардын арасындагыφ бурчу өзгөрүлмө мүнөзгө ээ болсо, анда үч бурчтуктун үчүнчү c жагы, φ өзгөрүлмөсүнөн көз каранды же функция болот. Чынында эле косинустар теоремасы боюнча

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\varphi$ болгондуктан, аралыкты оң деп

c = $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\varphi}$ = c (φ) – бир өзгөрүлмөлүү функциясына ээ болобуз.

Ошентип, жогоруда каралган мисалдарда көрүнгөндөй, сандык көптүктөрдүн арасындагы көз

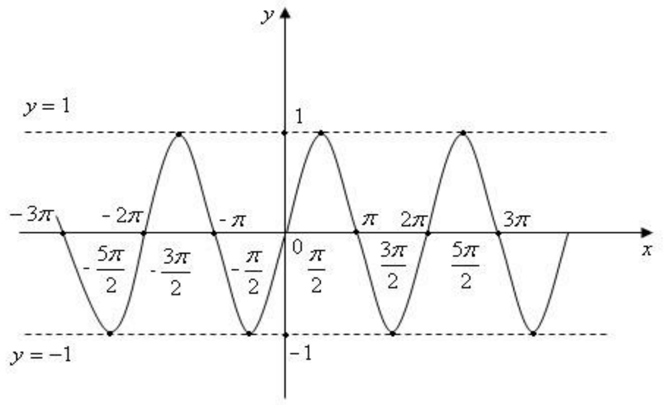


6.8-чийме

карандылык байланыштарын үйрөнүү, практикалык муктаждыктардан же зарылчылыктардан улам келип чыгат. Ошондой эле, көз карандылык байланышында болгон өзгөрүлмөлөрдүн биринчиси эркин көз каранды эмес чоңдуктар (сандар), экинчиси көз каранды чоңдуктар (сандар) болорун байкайбыз.

6.1.3 Функциялардын чектелүү, монотондуулук, жуптук, тактык, мезгилдүүлүк шарттары.Асимптота менен жанымa.

1. Чектелген функциялар. Функциялардын баары эле көптүктөрдү бири – бирине чагылтуу аркылуу байланыштыруу милдетин аткарышып, чөйрө кубулуштарын сандарга салыштырып таануу мүмкүнчүлүгүн түзгөн математикалык модел – каражаттар болушкандыктан, кубулуштар сыяктуу эле алардын да жеке өздөрүнө гана тиешелүүөзгөчөлүктөрү болот.

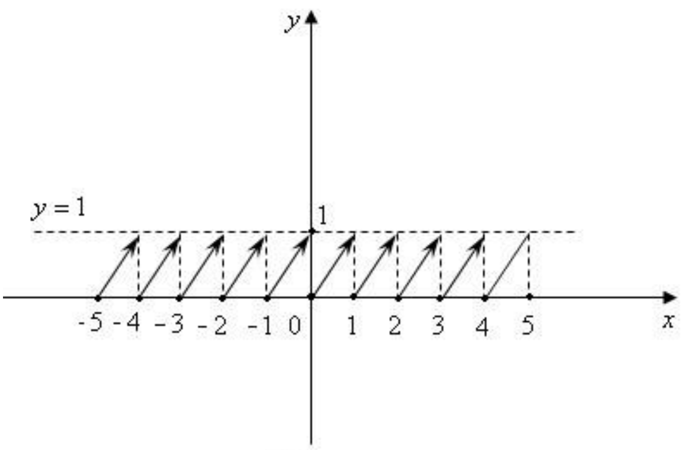


6.9-чийме

6.1. Аныктама. *Кандайдыр бир чектүү m, M сандары табылып, X көптүгүнүн бардык x $(\forall x \in X)$ чекиттеринде (сандарында) $y = f(x)$ функциясын y маанилери үчүн $(y \in Y)$,*

$$m \leq y \leq M \text{ же}$$

$m \leq f(x) \leq M$ *шарты аткарылса, анда $f(x)$ функциясын X көптүгүндө чектелген функция деп айтабыз.* m *саны функциянын накта төмөнкү чеги, M саны функциянын накта жогорку чеги деп аталышып, тиешелүү түрдө $m = inf\{f(x)\}$,*



6.10 – чийме

$M = sup\{f(x)\}$ *символдору менен белгиленишет. Эгерде m, M сандарынын бирөөсү эле табылбаса, анда функцияны чектелбеген деп айтабыз.*

Чектелген көптүктөрдүн бир канча, кээде чексиз көп төмөнкү жана жогорку чектери боло бергендиктен, “накта” сөзүн кошуп айтууга туура келет. Мисалы

$\mathrm{Y} = \{\, y \,: y \,\in R,\ 0 \leq\ y\ \leq 9 \,\}$ көптүгүн төмөнкү жана жогорку чектери чексиз көп, төмөнкү чектеридеп нөл жана бардык терс сандарды $m_i = \{0, -1, -2, -3, -4, \dots\}$, ал эми жогорку чектери деп 9 дан чоң болгон бардык оң сандарды $M_i = \{9,\ 10,\ 11,\ 12,\ \dots\}$ ала берүүгө болот. Анткени y саны 9 дан кичине же барабар болгон оң сандар болушат (6.8 - чийме). Мисалдан көрүнгөндөй, бардык чексиз көп төмөнкү чектердин **эң чоңу накта төмөнкү,** ал эми бардык чексиз көп жогорку чектердин **эң кичинеси накта жогорку** чектер болушу*п,*

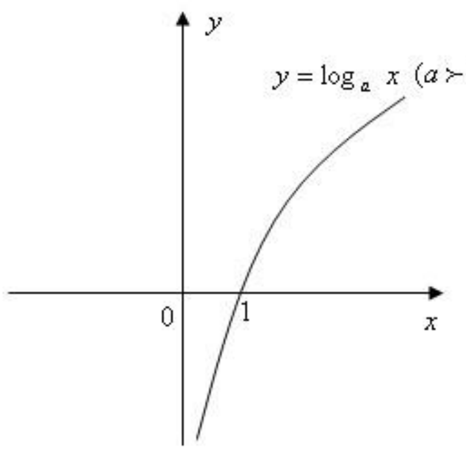
$inf\ \{y\} =\ max\{m_i\} = 0$, $sup\{y\} = \min\{M_i\} = 9$

(i= 1, 2, 3, …) көрүнүштөрдө жазылышат.

Чектелген функцияга мисал катары $y = \sin x$ функциясын алалы. Чынында эле $\forall x$ ∈R: $|\sin x| \leq 1$ болгондуктан, $-1 \leq \sin x \leq 1$ келип чыгып $m = -1$, $M = 1$ сандары табылгандыктан, жогорудагы 6.1 – аныктамасы аткарылат (6.9 - чийме). Экинчи бир мисал катары "x санын бөлчөк бөлүгү” – деп аталган $y = x - [x]$ ={ x } функциясын көрсөтөлү (Мында $[x] -$ "x тин бүтүн бөлүгү”). Кандай гана сан болбосун, анын бөлчөк бөлүгү 1 санынан ашып кетпеген оң сан болгондуктан,

$0 \leq \{\, x \,\} \leq 1 \Rightarrow m = 0,\ \ M = 1$ сандары табылып, берилген функция чектелген болот (6.10 – чийме). Ал эми 6.3 – чиймеде көрсөтүлгөн $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы,

$\mathrm{D} = \{\, (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1,\ (x, y) \in R^2\}$ областында $m = 0$, M = 1 сандарынын арасында өзгөргөн, чектелген функция болот ($0 \leq z \leq 1$).



6.11– *чийме*

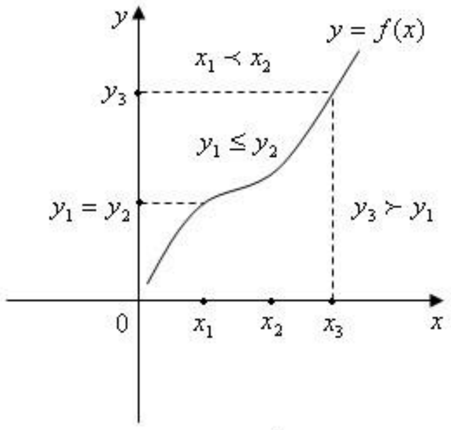
Эки жагынан тең чектелбеген же бир жагынан эле чектелбеген функциялар да, чектелбеген деп аталышат.

Мисалы 6.1 – чиймеде көрсөтүлгөн $y = x^2 + 1$ функциясы, $m = 1$ накта төмөнкү чегине ээ болуп, төмөн жагынан чектелгенине карабастан, $x \in X \equiv R$ аныкталуу областында жогору жагынан чектелген эмес же $y \in [1\,, +\infty[$. Ошондой эле, 6.7 – чиймеде көрсөтүлгөн $z = x^2 + y^2$, $(x;\ y) \in R^2$, $z \in [0\,, +\infty[$эки өзгөрүлмөлүү функциясы $m = 0$ накта төмөнкү чегине ээ болуп, жогору жагынан чектелген эмес. Ал эми эки жагынан тең чектелбеген функцияларга $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1,\ x \in]0\,, +\infty[\,, y \in]-\infty\,, +\infty[)$ бир өзгөрүлмөлүү функциясын (6.11 - чийме),

$u = x^3 + y^3 + z^3$,$(x;\ y;\ z) \in R^3$, $u \in R =]-\infty\,, +\infty[$үч өзгөрүлмөлүү функциясын мисал келтирүүгө болот.

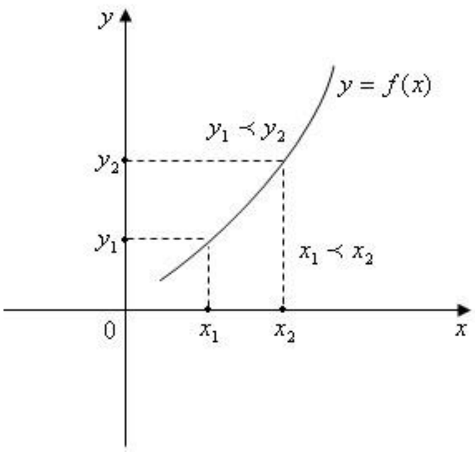
2. Монотондуу өзгөрүүчү функциялар.

6.2. Аныктама.$y = f(x)$ *функциясы* $(x \in X, y \in Y)$ *берилип, X көптүгүндөгү аргументтердин кичине маанилерине функциянын Y көптүгүндөгү кичине (чоң) маанилери же болбосо, аргументтердин чоң маанилерине функциянын чоң (кичине) маанилери туура келсе, анда функцияны X көптүгүндө монотондуу өсүүчү (кемүүчү) деп айтабыз.*



6.12 – *чийме* а)

Монотондуу кыргызча ырааттуу деген маанини түшүндүрүп, монотондуу өсүүчү (кемүүчү) жана шыдыр монотондуу өсүүчү (кемүүчү) деген эки түрлөргө бөлүнөт. Аларды символдор аркылуу көрсөтөлү:



6.12 – *чийме* б)

1). $\forall\, x_1, x_2 \in X\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x_1) \le f(x_2) \text{ жай монотондуу өсүүчү}, \\ f(x_1) \ge f(x_2) \text{ жай монотондуу кемүүчү}. \end{cases} \qquad (6.2)$$

Демек бул учурда аргументтер барабар эмес болгонуна карабай, функциялардын айрым чекиттердеги (аргументтердеги) маанилери тең болуп калышы мүмкүн.

2). $\forall\, x_1, x_2 \in X\colon\ x_1 < x_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \text{ шыдыр өсүүчү}, \\ f(x_1) > f(x_2) \text{ шыдыр кемүүчү}. \end{cases} \qquad (6.3)$$

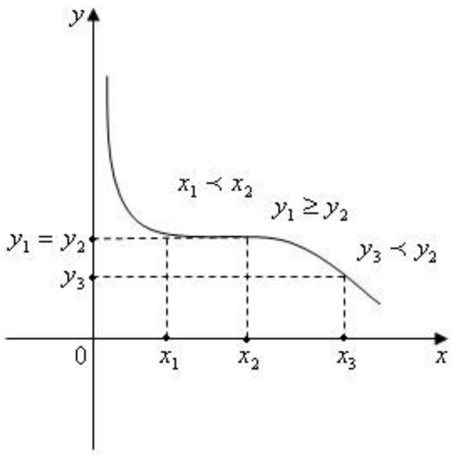
Шыдыр монотондуулукта аргументтер барабар эмес болгон учурда, функциялардын маанилери да эч качан тең болушпайт.

Аргументтердин $x_1,\ x_2$ маанилерине тиешелеш болгон функциянын

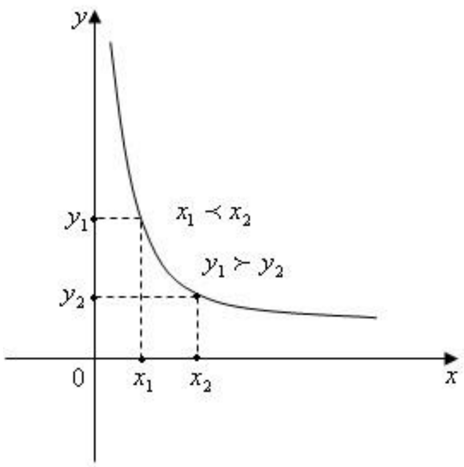
$y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$ маанилерине карап, жай монотондуу өсүүчү (6.12 a.- чийме) жана шыдыр монотондуу өсүүчү (6.12 б. – чийме) бир өзгөрүлмөлүү функцияларды графикте көрсөтөбүз. Ошондой эле жай монотондуу кемүүчү (6.13 $a.$–чийме), шыдыр монотондуу кемүүчү (6.13б. – чийме) функциялар графикте сүрөттөлүшкөн. Ал эми тепкичтүү$y = [x]$ –“ x тин бүтүн бөлүгү”

(кээде $y = E(x)$ –деп да белгилешет) функциясы ыраттуу өспөй секирик мүнөзүнө ээ болгондуктан, жалпы X аралыгында монотондуу өсүүчү деп айта албайбыз (6.5 – чийме).

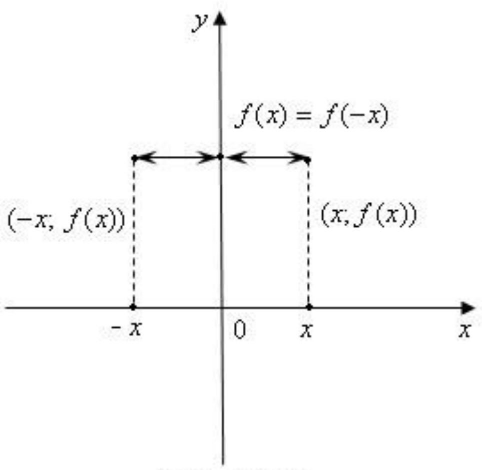
$\forall\, x \in$X чекиттеринде функция туруктуу бир гана $y = \mathrm{f}(x) = a$ маанисине ээ болсо, анда аны X көптүгүндө $y = a$- constanta “ туруктуу сан “ деп эсептейбиз.



6.13 – чийме а)



6,13 – чийме б)



6.14 – чийме

3. Жуп жана так функциялар.

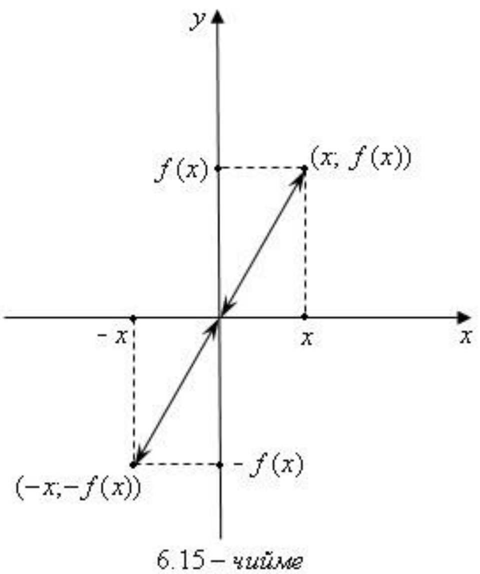
6.3Аныктама. $y = f(x)$

функциясы ($x \in X, y \in Y$) берилип, X көптүгүн бардык x элементтери үчүн

$f(-x) = f(x)$ шарты аткарылса, анда X көптүгүндө $f(x)$ функциясын жуп функция, ал эми $f(-x) = -f(x)$ болсо, так функция болот дейбиз. Эгерде бул шарттардын экөөсү тең аткарылбаса, анда $f(x)$ ти жуп да, так да эмес функция деп айтабыз.

Бир өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ функциясы жуп болсо, анда анын декарттык координаталар системасындагы графиги Оy огуна карата симметриялуу жайгашат. Анткени аргументтердин x жана "$-x$" сыяктуу эки башка маанилерине, функциянын бир эле

$y = f(-x) = f(x)$ мааниси туура келип, графикте $(-x; f(-x))$, $(x;\ f(x))$ чекиттери Оy огуна карата симметриялуу жайгашышкан (6.14 – чийме). Ал эми так функциянын графиги О башталма чекитине карата симметриялуу жайгашат, анткени эки башка x жана "$-x$" аргументтерге, $f(x)$ жана $-f(x)$ деген функциянын эки башка маанилери туура келип, $(-x; -f(x))$, $(x;\ f(x))$ чекиттери О координата башталмасына карата симметриялуу жайгашкан болушат (6.15 – чийме). Ошентип жуп жана так бир өзгөрүлмөлүү функциялар, Оx огундагы О башталмасына карата өз ара симметриялуу жайланышкан x жана "$-x$" аргументтерине тиешелеш коюлган функциянын маанилерин салыштыруу менен аныкталат.



6.15 – чийме

Эки өзгөрүлмөлүү $z = f(x, y)$ функциясын аргументтери R^2 мейкиндигин түзгөн Оxy тегиздигинде жайгашкан областтарга таандык чекиттер болгондуктан, ушул тегиздикте О координаталар башталмасына карата симметриялуу жайланышкан $(-x; -y)$ жана $(x; y)$ чекиттериндеги функциянын маанилерин салыштырып, жуп же так функциялар түшүнүгүн кеңейтүүгө болот. Ошондой эле, өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүнө карата гана жуп же так болгон функциялар кездешет. Мисалы,$z = x^2 + y$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы x ке карата жуп болгону менен, y ке карата жуптук талап аткарылбайт. Ал жуп да эмес жана так да эмес функция болот.

Жалпы учурда X, Y областтарынын (X$\subseteq R^n$, Y$\subseteq R$) арасындагы көз карандылык байланышты орнотуучу n өзгөрүлмөлүү $y = \mathrm{f}(x)$ функциясында, аргумент $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$координаталарына ээ болот. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү жуп жана так функциялар, $n + 1$ −өлчөмдүү О$x_1 x_2 \dots x_n y$ декарттык координаталар системасынын n өлчөмдүү О$x_1 x_2 \dots x_n$ мейкиндикчесинде жайгашышкан, О башталмасына карата симметриялуу $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ жана $(-x_1; -x_2; \dots; -x_n)$ чекиттериндеги функциянын $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ жана $f(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ маанилерин салыштыруу менен аныкталат. Ошондой эле көп өзгөрүлмөлүү функцияларда, айрым бир x_i өзгөрүлмөлөрүнө карата гана $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$ жуп же так болгон функцияларды жолуктурууга болот.

Ошентип, көп өзгөрүлмөлүү функциялардын жуптугу же тактыгы жөнүндө сөз кылуу абстрактуу мүнөзгө ээ болгондуктан, көбүнчө аларды атайын изилдөө иштеринде коюлган талаптарга жараша гана тактайбыз.

3. Мезгилдүү функциялар.

6.4 Аныктама. $y = f(x)$ *функциясы* $(x \in X, y \in Y)$ *берилип, X көптүгүндөгү бардык* x *элементтери (сандары) үчүн кандайдыр бир T саны табылып (T*$\neq 0$*),* x *жана* $x + \mathrm{T}$ *эки башка аргументтерине функциянын бир эле* $f(x)$ =$f(x + \mathrm{T})$ *мааниси туура келсе, анда* $f(x)$ *функциясын X көптүгүндө мезгилдүү функция деп айтабыз. T саны функциянын мезгили деп аталат.*

Т мезгилине ээ болгон функция, x жана $x + \mathrm{T}$ чекиттеринде барабар мааниге ээ болуп, ар бир Т аралыгынан соң кайталануучу болорун байкайбыз. Мисалы, жогоруда каралган $y = x - [x]$=$\{x\}$ (x санынын бөлчөк бөлүгү) функциясы үчүн Т = 1 саны табылып, $\forall\, x \in R$ үчүн x жана $x + 1$ сандарынын бөлчөк бөлүктөрү

$\{x\} = \{x + 1\}$ барабар болушат. Чынында эле сандын бөлчөк бөлүгү 1 ден ашып кетпеген оң сан болуп, улам 1 бүтүн санына жеткенде бөлчөк бөлүгү нөлгө айланып, T = 1 мезгилдүү кайталанма функция болот (6.10 – чийме). $x = 5{,}7$ десек, анда

$\{x\} = \{5{,}7\} = 0{,}7 \quad \Rightarrow \{x + \mathrm{T}\} = \{5{,}7 + 1\} = \{6{,}7\} = 0{,}7$ болуп, 5,7 жана 6,7 сандарынын бөлчөк бөлүктөрүнүн тең экендигине күбө болобуз. Ошондой эле $y = \sin x$ тригонометриялык функциясы T = 2π мезгилине ээ функция болуп, $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ теңдештиги орун алгандыктан, графиги T = 2π аралыгынан соң кайталанып турганын 6.9 – чиймеден көрөбүз.

Көп өзгөрүлмөлүү функцияларда мезгилдүүлүк түшүнүгүар бир өзгөрүлмөлөр боюнча табылган T санына жараша өз – өзүнчө, же бардык өзгөрүлмөлөргө жарамдуу табылган T санына карата бардык өзгөрүлмөлөргө бир учурда жайылтылышы мүмкүн. Мисалы эки өзгөрүлмөлүү $z = \cos x + y$ функциясы x өзгөрүлмөсү боюнча T = 2π мезгилине ээ болгону менен, y өзгөрүлмөсү боюнча мезгилсиз функция болуп, жалпы учурда мезгилсиз функция деп эсептелет. Ал эми

$z = \sin x + \cos y$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы x, y өзгөрүлмөлөрүн экөөсү боюнча тең T = 2π мезгилдүү функция болот.

n өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ функциясында $x \in X \subseteq R^n$, $y \in \mathrm{Y} \subseteq \mathrm{R}$ болгондуктан, аргумент $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ координаталары менен берилет. Ошондуктан кандайдыр бир T саны табылып, n өлчөмдүү мейкиндикте жайгашкан x чекити $x + \mathrm{T}$ чекитине кыймылдап жеткенде, анын координаталары $x + \mathrm{T} = \{x_1 + \mathrm{T}; x_2 + \mathrm{T}; \dots; x_n + \mathrm{T}\}$ көрүнүштө болуп,

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1 + \mathrm{T}, x_2 + \mathrm{T}, \dots, x_n + \mathrm{T})$ барабардыгы орун алса гана, берилген функцияны 6.4 – аныктамасын маанисиндеги T мезгилдүү функция деп айта алабыз. Бул учурда функция бардык $\mathrm{O}x_i$ багыттары боюнча ($i = 1, 2, \dots, n$) T аралыгынан кийин кайра кайталана берет. Бирок функциялар сүрөттөгөн кубулуштарына жараша айрым багыттар боюнча ар башка аралыктарда кайталанып, калган багыттарда кайталанбай калышы да мүмкүн, бул учурда x чекитинин $x + \mathrm{T}$ чекитине которулуусун $\overrightarrow{\mathrm{O}x} = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ векторуна $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \{t_1; t_2; \dots; t_n\}$ векторун кошуу менен жүргүзүлдү деп түшүнүп, айрым

$t_i = 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ болушу да мүмкүн деп эсептеп, кайталануу процессин

$\mathfrak{f}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathfrak{f}(x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n)$ теңдештиги менен көрсөтөбүз. Ошентип көп өзгөрүлмөлүү функциялардагы мезгилдүүлүк маселеси айрым бир өзгөрүлмөлөргө жана бардык өзгөрүлмөлөргө карата бөлүнүп түшүндүрүлгөндүктөн, абстрактуу мүнөзгө ээ болуп, практикалык изилдөөлөрдөгү зарылдыкка жараша гана эске алынат.

Эскертүү: Эгерде T саны функциянын мезгили болсо, анда

T, $2T$, $3T$, . . . , nT, . . . сандарынын ар бирин мезгил деп алууга болот.

Анткени $f(x) = f(x + 2\mathrm{T}) = f\ (x + \mathrm{T} + \mathrm{T}) = f(x + \mathrm{T})$ *ж.б.у.с. Ошондой эле каалагандай функцияны T=0 нөл мезгилдүү функция деп эсептөөгө болот.*

4. Функциянын асимптоталары жана жанымалары.

Функциянын асимптоталары менен жанымалары түз сызыктар болгондуктан, алар түздүн теңдемелери менен берилишет.

6.5 Аныктама. $y = f(x)$ *функциясын асимптота сызыгы деп, анын графиги менен кесилишпей, бирок ага чексиз жакындап жандап келген түз сызыкты айтабыз жана пределдик абалда функциянын графиги, асимптота түзүнө тийип, жабыша уланат деп элестетебиз.*

Асимптоталар вертикалдык, горизонталдык жана жантык деп бөлүнүшөт. Оy огуна параллель жайгашкан асимптоталарды *вертикалдык* деп, Оx огуна параллель жайгашса горизонталдык деп калгандарын жантык асимптоталар дейбиз. Мисалы 6.23, 6.24 а.– чиймелерде $y = x^{\alpha}$ функциясына Оy огу же $x = 0$ түзү вертикалдык, Оx огу же $x = 0$ түзү горизонталдык асимптоталар болушкан учурлар сүрөттөлгөн. Функциянын асимптоталарын табуунун төмөндөгүдөй тартибин түзөбүз:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ чектүү предели жашаса, анда $y = b$ берилген функциянын горизонталдык асимптотасы болот. Ал эми $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ болсо, анда горизонталдык асимптотасы жок болуп, кошумча кийинки кадамдагы изилдөөгө өтөбүз.

Эгерде $y = kx + b$ түзү $y = f(x)$ функциясын жантык асимптотасы болсо, анда $x \to \infty$ умтулганда алар бири – бирине чексиз жандаша жакындашып, чексизге жеткенде дал келишет же айырмасы

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$ пределине ээ болот деп ойлойбуз. Ошондуктан чексиз алыстатылган x чекиттеринде

$f(x) - (kx + b) \approx \alpha(x) -$ чексиз кичине чоңдук болот. Мындан $k \approx \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x}$ же $k = \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - 0 - 0 =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \Rightarrow$ $\boxed{k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}}$, ошондой эле $b \approx f(x) - kx - \alpha(x)$ же

$b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx - \alpha(x)] = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) - 0 = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$ коэффициенттерин табууга болот.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ предели жашаса жантык асимптотасы бар, ал эми предели жашабаса жантык асимптотасы жок болуп, кийинки кадамдагы изилдөөнү улантабыз.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = b$ чектүү предели жашаса, анда жантык асимптотасы бар болуп, $y = kx + b$ теңдемеси менен жазылат. Эгерде чектүү предели жашабаса, анда асимптотасы жок функция болот. $k = 0$ болгон учурда жантык асимптота горизонталдык асимптотага айланат.

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ болсо, анда $x = a$ түзү вертикалдык асимптота болот.

Мисалы $y = \frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$ функциясын графигинин асимптоталарын издейли.►

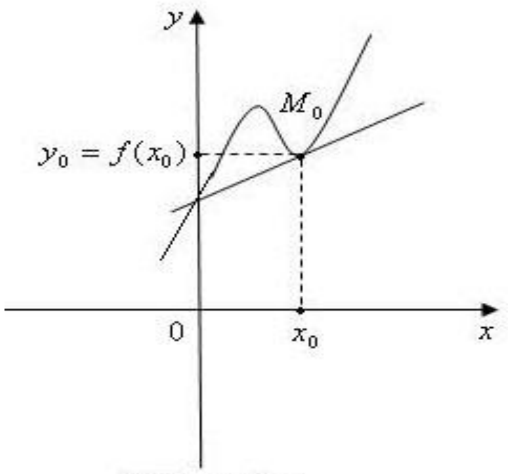
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3(1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^3})}{x^2(2+\frac{5}{x^2})} = \frac{\infty\cdot(1-0-0)}{2+0} = \infty.$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-6x^2+3}{x\cdot(2x^2+5)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\cdot(1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^3})}{x^3\cdot(2+\frac{5}{x^2})} = \frac{1}{2} = k$ чектүү предели табылды.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5} - \frac{1}{2}\cdot x\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-12x^2-5x+6}{4x^2+10} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot(-12-\frac{5}{x}+\frac{x}{x^2})}{x^2\cdot(4+\frac{10}{x^2})} = \frac{-12}{4} = -3 = b$$ болуп, функция $y = \frac{1}{2}\cdot x - 3$ теңдемеси менен берилген асимптота түзүнө ээ болот.◄

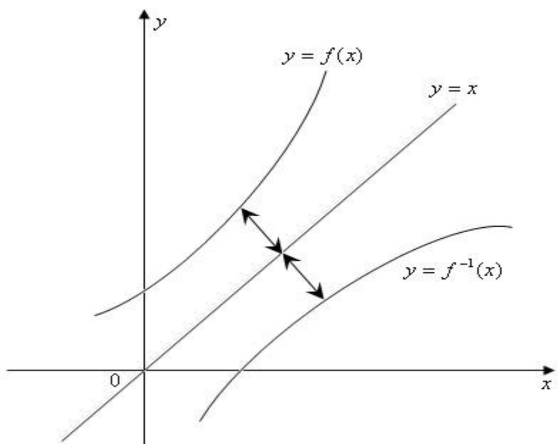
6.6 Аныктама. $y = f(x)$ *функциясын графигинде жайгашкан* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинен (мында* $y_0 = f(x_0)$ *) жүргүзүлгөн жаныма түз сызыгы деп, бул чекиттин өзүндө жана анын жакынкы чеке белинде, берилген функциянын графигин кесип өтпөгөн, бирок анын графиги менен кесилишпесе да бир гана* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитине тийип өткөн, же бир гана* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *жалпы чекитине ээ болгон түз сызыкты айтабыз.*



6.16 – *чийме*

Мектеп программасынан белгилүү болгондой $y = f(x)$ функциясын графигинде жайгашкан $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси

$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ көрүнүштө жазылат. Ошентип функциянын графиги менен кесилишпей, аны менен бир гана жалпы чекитке ээ түздөрдүн баары функцияга жаныма түз болуп эсептелет. Айрым жаныма түздөр, жаныма жүргүзүлүүчү чекиттин жакынкы чеке белинде гана функциянын графиги менен кесилишпей, анын сыртында кесилише берүүсү мүмкүн (6.16 – чийме).



6.17 – *чийме*

6.1.4 Тескери функциянын жашоо шарттары

Функциялар сан көптүктөрүн бири – бирине чагылтуучу эреже – мыйзамдар болгондуктан, өз ара бир маанилүү чагылтууну ишке ашырганда гана тескериси жашайт (6.1.1 ди кара). Ошентип X көптүгүндө $y = f(x)$ функциясы берилип, Y өзгөрүү областы болсо ($x \in X \subseteq R,\ y \in Y \subseteq \mathrm{R}$), анда анын тескери функцияны табуу үчүн:

1. f – “эреже – мыйзамы” X көптүгүн ар бир x элементин жалгыз өзүнө гана тиешелеш коюлган, Y көптүгүнөн бирден гана y элементи табылуусу керек, б.а. ар башка x аргументтерине, функциянын ар башка y маанилери туура келүүсү керек (өз ара бир маанилүүлүк шарты).

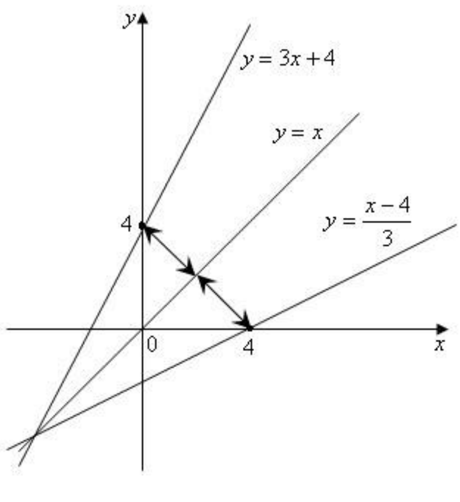
2. $y = f(x)$ теңдештиги теңдеме катарында каралып, x өзгөрүлмөсүнө карата бир маанилүү $x = f^{-1}(y)$ чечимине ээ болушу керек.

Табылган $x = f^{-1}(y)$ чечимин тескери функция деп алсак, анын графиги $y = f(x)$ оң функциясын графиги менен дал келип, иш жүзүндө оң жана тескери функциялар бир эле графикте сүрөттөлүшөт. Бирок тескери $x = f^{-1}(y)$ функциясында y өзгөрүлмөсү көз каранды эмес чоңдук же аргумент, ал эми Y көптүгү аныкталуу областы, ал эми x көз каранды чоңдук же функциянын мааниси, ал эми X өзгөрүү областы болуп эсептелет, б.а. Оx жана Оy октору өз кызматтык милдеттерин алмаштырышат, б.а. Оx огуна функциянын маанилери, ал эми Оy огуна аргументтердин маанилери жайгашып калышат.

Биз функцияны аныктоодо X көптүгүн аныкталуу областы, Оx огун аргументтердин огу, ал эми Y көптүгүн өзгөрүү областы, Оy огун функциянын маанилерин огу деп көнүп калгандыктан, көнгөн адатты бузбоо үчүн:

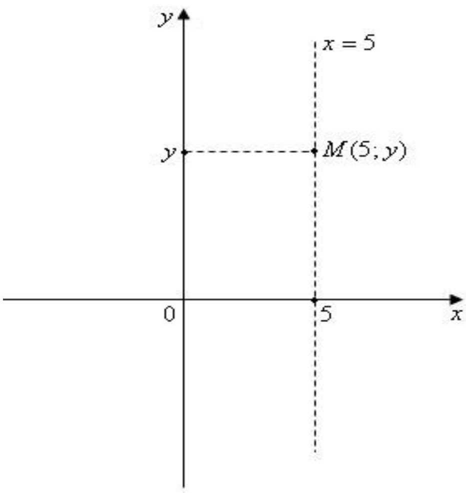
3. $x = f^{-1}(y)$ тескери функциясында x менен yөзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, тескери функцияны

$y = f^{-1}(x)$ көрүнүштө жазуу эрежесин кабыл алабыз.

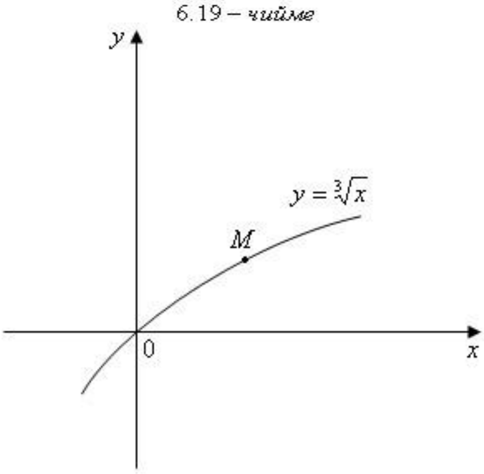


6.18 – *чийме*

Ал эрежеге ылайык $y = f^{-1}(x)$ тескери функциясында, берилген $y = f(x)$ функциясынын аныкталуу областы менен өзгөрүү областтары жана Оx менен Оy октору орундарын алмаштырылып жазылат. Бул учурда, берилген Оxy декарттык координаталар системасындагы $y = x$ түзүндөгү чекиттер гана орундарында калып, калган чекиттер ушул $y = x$ түзүнө (Оx жана Оy окторунун арасындагы бурчту тең экиге бөлүүчү биссектриса сызыгына) карата симметриялуу которулушат. Иш жүзүндө Oxy координаталар системасынан башка, ага $y = x$ түзүнө карата симметриялуу болгон жаңы Oyx декарттык координаталар системасына өтөбүз. Бирок оң жана тескери функциялардын графиктерин салыштыруу ыңгайына карап, бир эле координаталар системасында тургузабыз. Ошентип $y = f(x)$ функциясынын графиги тургузулган координаталар системасында, x менен y тин орундары алмаштырып жазылган $y = f^{-1}(x)$ тескери функциясынын графигин тургузсак, бир эле декарттык координаталар системасында $y = x$ биссектрисасына карата өз ара симметриялуу жайгашышкан оң жана тескери функциялардын графиктерин тургузган болобуз (6.17 – чийме).



6.19 – чийме



6.20 – чийме

Мисалы $y = 3x + 4$ функциясына тескери болгон функцияны табайлы. Анын аныкталуу областы $X =]-\infty, +\infty[\equiv R$, өзгөрүү областы $Y =]-\infty, +\infty[\equiv R$ бардык чыныгы сандардын көптүктөрү болушуп, ар бир x тин өзүнө жалгыз гана бир y тиешелеш болгондуктан, өз ара бир маанилүү функция болот. Берилген теңдештикти теңдеме катарында чыгарсак, $x = \frac{y-4}{3}$ тескери функциясы келип чыгып, анын графиги берилген $y = 3x + 4$ оң функциянын графиги менен дал келет. Бирок тескери функцияны жазууда кабыл алынган эрежени сактасак, б.а. x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, тескери функцияны $y = f^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$ көрүнүштө жазсак, анда анын графиги менен, берилген $y = 3x + 4$ оң функциянын графиктери, $y = x$ түзүнө (биссектрисасына) карата өз ара симметриялуу жайгашышат (6.18 – чийме).

Көп өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ функциясында $x \in X \subseteq R^n$, $y \in Y \subseteq R$ болсо, анда n өлчөмдүү мейкиндиктеги бир чекитти элестеткен аргумент

$x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ координаталары же өзгөрүлмөлөрү менен берилгендиктен, өз ара бир маанилүүлүктү $x = \left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix}\right\} \overset{f}{\leftrightarrow} y$ же, n сандагы x_i өзгөрүлмөлөрүн $(i = 1, 2, \dots, n)$ жазылган көрүнүштөгү бир топ менен аныкталган x чекитинин жеке өзүнө гана тиешелеш коюлуучу, бир гана y саны табылат жана тескерисинче, бир y санынын жеке өзүнө гана тиешелеш коюлуучу, n өлчөмдүү мейкиндиктеги бир x чекитин аныктоочу $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ өзгөрүлмөлөрүн бирден гана тобу табылат деп түшүнөбүз.

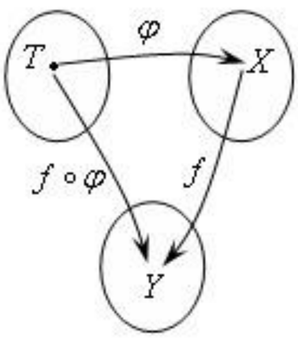
Өз ара бир маанилүү көп өзгөрүлмөлүү функциялар жашаганы менен, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ теңдештигин теңдеме катарында карап, бир маанилүү $x_i = f_i^{-1}(y)$ чечимдерин табуу $(i = 1, 2, \dots, n)$, жалпы учурда татаал болушу мүмкүн. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү функциялардын тескери функцияларын, n өлчөмдүү X көптүгүндө өзгөргөн айкын $x_i = \varphi_i(t)$ сыяктуу $(i = 1, 2, \dots, n;\ t \in T)$ параметрдик же башкача теңдемелер менен берилген түздөрдө жана фигураларда жайгашкан чекиттер үчүн гана жазып көрсөтөбүз. Мисалы $z = x + y^3$ функциясынын тескерисин, $\begin{cases} x = 5, \\ y = y \end{cases}$ түзүнүн $(5; y)$ чекиттеринде табалы (6.19 – чийме). Өзгөрүлмөлөр ушул $x = 5$ түзүндө гана жайгашса, берилген функция $z = 5 + y^3$ көрүнүшкө келет. Аны y ке карата чыгарып, $\begin{cases} y = \sqrt[3]{5 - z}, \\ x = 5 \end{cases}$ тескери функциясын табабыз. Ушул эле функциянын $y = \sqrt[3]{x}$ ийрисинин чекиттериндеги (6.20 – чийме) тескерисин табалы: $z = x + (\sqrt[3]{x})^3$ же $z = 2x$ же $x = \frac{1}{2}z$ болгондуктан, берилген ийринин чекиттериндеги тескери функция $\begin{cases} y = \sqrt[3]{x}, \\ x = \frac{1}{2}z \end{cases}$ көрүнүштө жазылат. Ошентип көп өзгөрүлмөлүү оң жана тескери функциялардын графиктери дал келишип, бирөө гана болот. Анткени көз каранды эмес өзгөрүлмөлөрдүн (аргументтердин) мейкиндигин n

өлчөмү менен, көз каранды өзгөрүлмөлөрдүн же функциялардын маанилерин мейкиндигин өлчөмү ($y \in R$ бир өлчөм) тең болбогондуктан, алардын орундарын алмаштырып жаза албайбыз. Каралган мисалда аргументтер $(x; y) \in R^2$ эки өлчөмдүү мейкиндикте, ал эми функциянын мааниси $z \in R$ бир өлчөмдүү мейкиндикте жайгашышкан.

Монотондуу өсүүчү(кемүүчү) функцияларда аргументтердин ар башка маанилерине, функциялардын да ар башка маанилери тиешелеш коюлгандыктан (чоңуна чоңу (кичинеси) же кичинесине кичинеси (чоңу)), алар өз ара бир маанилүү функциялар болушуп, тескери функциялары жашашат. Эгерде берилген функция монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болсо, анда анын тескери функциясы да монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болот.

6.1.5 Функциялардын суперпозициясы же татаал функциялар

Аныкталуу областы X жана өзгөрүү областы Y болгон $y = f(x)$ функциясы берилсин дейли. Эгерде функциянын аргументи болгон x көз каранды эмес өзгөрүлмөсү да, кайсы бир T көптүгүндө аныкталган φ эреже – мыйзамы боюнча t өзгөрүлмөсүнөн көз карандылык байланыштагы $x = \varphi(\mathrm{t})$ көрүнүштө функция болсо, анда $y = f(x)$ функциясын t өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция деп атап, $y = f(\varphi(\mathrm{t}))$ көрүнүштө жазабыз. Мында t өзгөрүлмөсү T көптүгүндө өзгөргөн кезде, x өзгөрүлмөсү X көптүгүнүн чегинен чыгып кетпейт деп эсептелет.



6.21– чийме

Кээде жогорудагыдай f жана φ функцияларынан турган татаал функцияны бул экөөнүн суперпозициясы деп атап, $y = f \circ \varphi$ көрүнүштө белгилейбиз. Функциялардын суперпозициясын схемада

T $\xrightarrow{f\circ\varphi}$ Y $\Leftrightarrow$ T $\xrightarrow{\varphi}$ X $\xrightarrow{f}$ Y көрсөтүп, 6.21 – чиймесинде сүрөттөйбүз. Айрым учурларда экиден көп бир канча функциялардын суперпозицияларынан турган татаал функцияларды жолуктурууга болот.

Мисалдар

1. $f(x) = e^{sin\sqrt{x}}$ татаал функциясын u $=\sqrt{x},\ v = \sin u$, g $= e^{v}$ деп, үч функциялардын суперпозициясы катарында кароого болот

$f \Leftrightarrow u \circ v \circ g$.

2. $y = \log_7(x^2 + 3\,x + 4)$ татаал функциясы u = $x^2 + 3x + 4$ жана

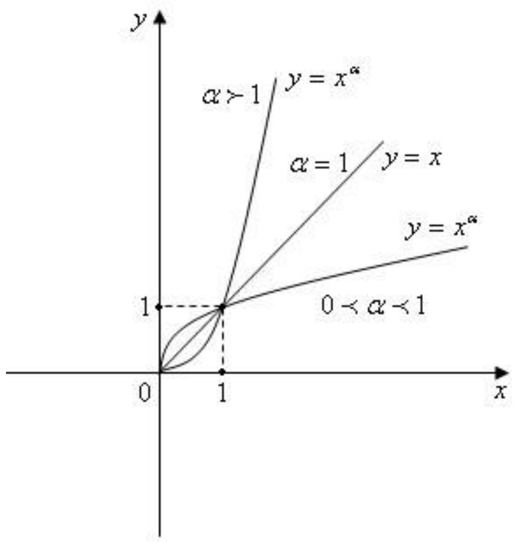
g = $\log_7$u функцияларынын суперпозицияларынан турат $y \Leftrightarrow u \circ g$.

3. Берилген $f(x) = x^2 + \lg x$, g(x) = $sinx + 2$ функцияларынан чагылтуу кезектерин алмаштырып, функциялардын суперпозицияларын түзүп көрөлү:

1. $f \circ g \quad \Rightarrow \quad f(g(x)) = (sinx + 2)^2 + \lg(sinx + 2)$,

2) $g \circ f$, $\Rightarrow$ $g(f(x)) = \sin(x^2 + \lg x\ ) + 2$.

Мындан эки функциялардын суперпозициялары чагылтуу кезектерин алмаштырган кезде, ар башка татаал функциялар болорун байкайбыз. Ошентип $f(x) \neq$ g(x), $\Rightarrow$ $f(g(x)) \neq g(f(x))$же $f \circ g \neq g \circ f$, функциялардын суперпозициялары коммутативдүү болбойт деген жыйынтыкка келебиз.



6.22 – чийме

Өз ара тескери болушкан функциялардын супепозицияларында аныкталуу областы X , өзгөрүү областы Y көптүктөрү болгон $y = f(x)$ функциясына карата $y = f^{-1}(x)$ тескери функциясы жашаса, анда

$\forall\, x \in X$: $f(f^{-1}(x)) = x$ же $f^{-1} \circ f = x$,

$\forall\, y\ \in Y$: $f(f^{-1}(y)) = y$ же $f \circ f^{-1} = y$ (6.4)

барабардыктары орун алат, б.а. берилген функцияга тескери функциянын тескериси, кайра берилген функциянын өзүнө барабар болот.

Чынында эле, тескери функцияларга келтирилген мисалдан $f(x) = 3x + 4$ жана $\text{f}^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}$өз ара тескери функциялар экендигин билебиз. Алардын суперпозицияларын түзүп көрүп:

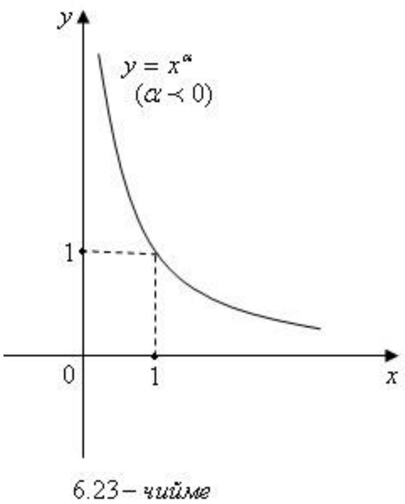
$f(\text{f}^{-1}(x)) = 3 \cdot \frac{x-4}{3} + 4 = x - 4 + 4 = x,$

$\text{f}^{-1}(\text{f}(y)) = \frac{3y+4-4}{3} = \frac{3y}{3} = y$ мындан (6.4) барабардыктарынын тууралыгын көрөбүз. Ошондой эле $f(x) = a^x$, жана $\text{f}^{-1}(x) = \log_a x$ өз ара тескери функциялары үчүн да (6.4) тү текшерип,

$f(\text{f}^{-1}(x)) = a^{\log_a x} = x$ жана $\text{f}^{-1}(\text{f}(y)) = \log_a a^y = y$, анын аткарыларына ишенебиз. Мындан башка тескеринин тескериси болгон

$arctg(tgx) = x$, $\arcsin(sinx) = x$ сыяктуу көптөгөн өз ара тескери тригонометриялык функциялардагы формулаларды эске салып кетебиз. Көп өзгөрүлмөлүү

$y = \text{f}(x) = \text{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясында $x = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ аргументи n өзгөрүлмөлөрдөн тургандыктан, алардын бир канчасы же баары $x_i = \varphi_i(t)(i = 1, 2, \dots, n;\ t \in \text{T})$, башка бир t өзгөрүлмөсүнө же бир канча өзгөрүлмөлөргө карата функция болушса, анда берилген $y = \text{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын ошол x_i өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция деп эсептей берүүгө болот. Мисалы



6.23– чийме

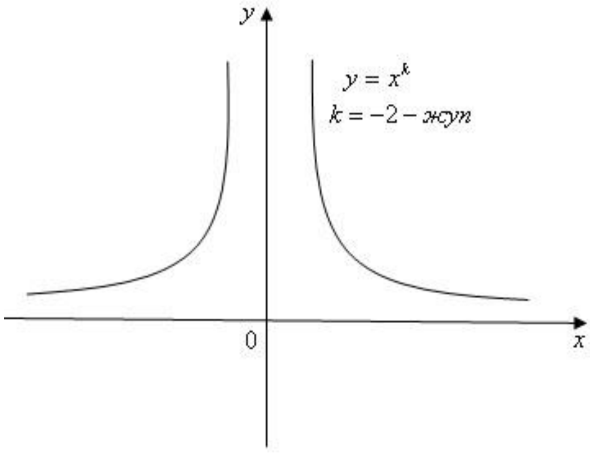
$f(x, y) = ye^{\sin x} - 7$ функциясында $u(x) = \sin x$ деп алып, берилген эки өзгөрүлмөлүү функцияны

$f(u(x), y) = ye^u - 7$ көрүнүштөгү x өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция болот деп эсептөөгө болот. Ал эми

$f(x, y, z) = \cos(e^{x+y+z})$ функциясын $\varphi(u) = e^u,\ u = = x + y + z$ деп,

$f(\varphi(u)) = \cos\varphi$ көрүнүштөгү татаал функция десе болот.

§ 6.2 Элементардык функциялардын классы



6.24 – чийме а)

6.2.1 Даражалуу жана көп мүчө көрүнүштөгү функциялар

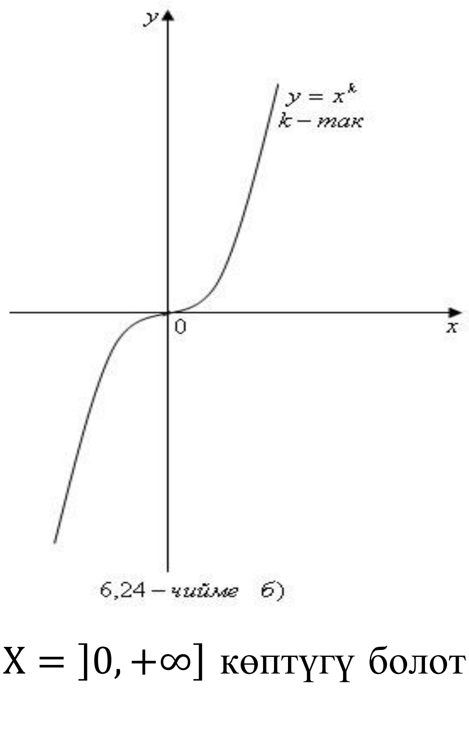
1. Даражалуу функциялар.

$y = x^{\alpha}$ көрүнүштөгү $(x \in X =]0\ ,+\infty[\ \equiv R_+)$ функция,

α - турактуу чыныгы сан болгон учурда даражалуу функция дейбиз.Эгерде $\alpha = 0$ болсо, анда

$y = x^0 = 1$ болуп, даражалуу функция $y = 1$ түзүнө айланат.

0< $\alpha < 1,\ \alpha = 1,\ \infty > \alpha > 1$ болгон учурларда $y = x^{\alpha}$ функциясы X көптүгүндө монотондуу өсүүчү болуп, $1^{\alpha} = 1$ болгондуктан, графиктеринин баары Oxy координаттык тегиздигинин (1 ; 1) чекити аркылуу өтүшөт (6.22 – чийме). Ал эми $\alpha < 0$ болсо, берилген даражалуу функция монотондуу кемүүчү болуп, графиги (1 ; 1) чекитинен өтөт (6.23 – чийме).



6,24 – чийме б)

Эгерде α оң рационалдык сан болсо, анда аны $\alpha = \frac{m}{n}$ көрүнүштөгү кыскарбас бөлчөк көрүнүштө жазып, даражалуу функцияны $y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ деп жаза алабыз. Демек, n так оң сан болгон учурда терс сандардын тамырлары жашай бергендиктен, даражалуу функциянын аныкталуу областын R_+ арлыгынан,

X = $]-\infty\ ,+\ \infty[\ \equiv R$ чыныгы сандардын мейкиндигине чейин кеңейтүүгө болот. n жуп оң сан болгон кезде, аныкталуу областы X= $[0\ ,+\infty[$, жуп терс сан болсо X = $]0,+\infty]$ көптүгү болот. Ал эми α терс рационалдык сан болсо, аны

$\alpha = -\frac{m}{n}$ кыскарбас көрүнүшкө келтирип, даражалуу функцияны $y = x^{-\frac{m}{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[n]{x^m}}$ деп жазабыз. n так оң сан болгон учурда, анын аныкталуу областы

$X =]-\infty\,, 0[\ \cup\ ]0\,, +\infty[\ = \{x :\ x \in R\ \wedge x \neq 0\}$ көптүгү болот, анткени бөлчөктүн бөлүмү катарында $x \neq 0$ болууга тийиш. n жуп оң сан болсо, терс сандан жуп көрсөткүчтүү тамыр чыкпагандыктан, аныкталуу областы X = $]0\,, +\infty[$ көптүгү болуп калат.

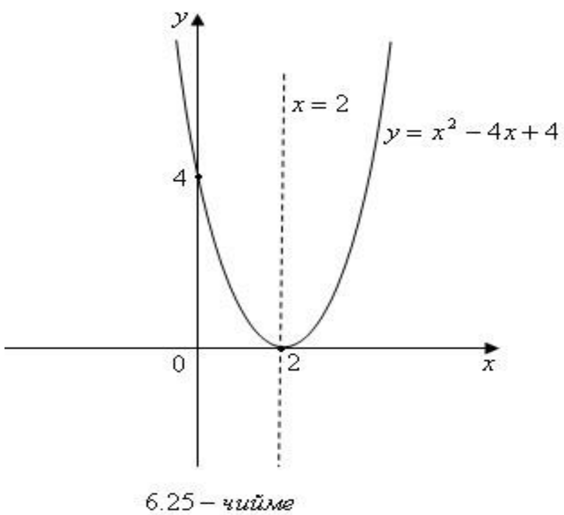
Эгерде $\alpha = k \in\ Z$ бүтүн сан болсо, даражалуу функция $y = x^k$ көрүнүшкө келип, аныкталуу областтары $k > 0$ болгондо

X = $]-\infty\,, +\,\infty[$ ≡R көптүгү, ал эми $k < 0$ болгондо

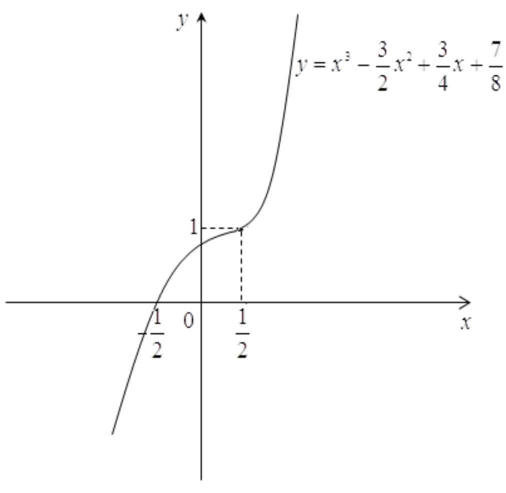
X = $]-\infty\,, 0[\ \cup\ ]0\,, +\infty[\ = \{x :\ x \in R\ \wedge x \neq 0\}$ көптүгү болуп эсептелишет. k жуп сан болсо $y = x^k$ жуп функция, k так сан болсо так функция болуп эсептелет (6.24а).б) - чиймелер). Ошентип даражалуу функциянын аныкталуу областы, даража көрсөткүчүнүн белгисине жараша кеңейип же тарып олтургандыктан, жогорудагы $y = x^\alpha$ жалпы жазылуусунда аныкталуу область $X =]0\,, +\infty[$ көрүнүштө болот.

2. Көп мүчө көрүнүштөгүфункциялар.

$n -$ даражадагы көп мүчө же бүтүн рационалдык функция деп



6.25 – чийме



6.26 – чийме

$$y = \mathrm{P}_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad (6.5)$$

көрүнүштөгү функцияны айтабыз. Мында даражалар $n \in N$, $a_i -$ коэффициенттери турактуу фиксирленген рационалдык сандар $a_i \in Q (i = 1, 2, \dots, n)$ $(a_n \neq 0)$, аныкталуу областы $x \in X \equiv R$ болушат.

Эгерде $n = 0$ болсо, (6.5) функциясы $y = \mathrm{P}_0(x) = a_0$ - түзүнө;

$n = 1$ болсо,

$y = \mathrm{P}_1(x) = a_0 + a_1 x$ - сызыктуу функциясына; $n = 2$ болсо,

$y = \mathrm{P}_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ –квадраттык үч мүчө функциясына айланат.

Мисалы: 1).$y = x^2 - 4x + 4$ квадраттык үч мүчө функциясын айырманын квадратын эсептөө формуласы боюнча $y = (x-2)^2$ көрүнүшкө келтирип, аныкталуу областы $X \equiv R$ болгон, $]-\infty, 2[$аралыгында монотондуу кемүүчү; $]2, +\infty[$ аралыгында монотондуу өсүүчү функцияны алабыз. Анын графиги төмөнкү чокусу (2; 0) чекитинде жайгашкан, $x = 2$ түзүнө карата симметриялуу парабола болуп, мезгилсиз жана жуп да, так да эмес функция болот (6.25 – чийме).

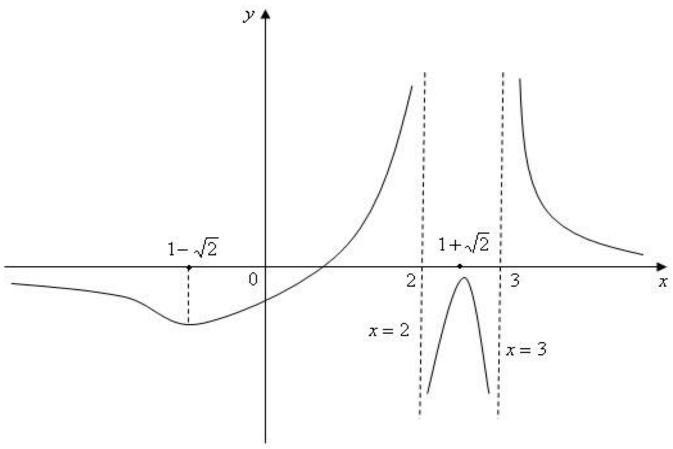
2). $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}$ функциясын айырманын кубун эсептөө формуласын пайдаланып, $y = (x - \frac{1}{2})^3 + 1$ көрүнүшүнө келтирип, графигин тургузалы (6.26 – чийме). Бул функциянын аныкталуу областы X≡R болуп, мезгилсиз жана жуп дагы эмес, так дагы эмес өз аныкталуу областынын чегинде монотондуу өсүүчү, асимптоталары жок функция болот.

3. Бөлчөк (рационалдык) функциялар.

Рационалдык функция деп

$$y = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m} \qquad (6.6)$$

көрүнүштөгү функцияны айтабыз. Мында a_i жана b_j коэффициенттери фиксирленген же турактуу рационалдык сандар $a_i \in Q$, $b_j \in Q$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m)$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, n, m - чектүү натуралдык сандар болушат. Берилген (6.6) рационалдык функциясынын аныкталуу областы бөлчөктүн бөлүмү катарында,



6.27 – чийме

$Q_m(x) \neq 0$ шартын канааттандыруучу x чекиттерин

Х $=$ $\{x: x \in R \wedge Q_m(x) \neq 0\}$ көптүгү болот. Эгерде $n < m$ болсо, (6.6) функциясын дурус (туура) бөлчөк көрүнүштөгү, ал эми $n > m$ болсо буруш (туура эмес) бөлчөк көрүнүштөгү функция деп атайбыз.

Мисалы: 1).$y = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$ дурус $(n = 1 < m = 2)$ бөлчөк функциясын аныкталуу областы $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ шартын канааттандырган R сандарынан турат.

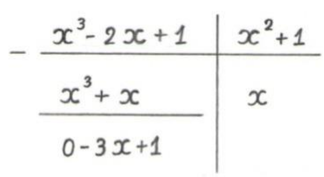
$x^2 - 5x + 6 = 0$ теңдемесин чыгарып $x_1 = 2,\ x_2 = 3$ чечимдерин табабыз. Демек берилген функциянын аныкталуу областы болуп, ушул чечимдерден башка бардык чыныгы сандардын

Х $=$ $]-\infty\,, 2[\ \cup\ ]2\,, 3[\ \cup\ ]3\,, +\infty[$ көптүгү эсептелет.$x_1 = 2,\ x_2 = 3$ сандары сүрөттөлгөн чекиттерди функциянын өзгөчө чекиттери дейбиз. Анткени бул чекиттерге эки жагынан тең жакындасак, бөлчөктүн бөлүмү нөлгө жакындагандыктан, функциянын маанилери чексизге умтулушуп, чекиттердин эки тарабындагы функциянын маанилери бири – биринен кача башташат. Ошентип $x = 2$ жана $x = 3$ түздөрү вертикалдык асимптоталар, ал эми $y = 0$түзү горизонталдык асимптота болушат (6.27 -чийме).

Мектеп курсунда функцияны изилдөө темасынан белгилүү болгондой $y' = \frac{(x-1)' \cdot (x^2-5x+6) - (x-1) \cdot (x^2-5x+6)'}{(x^2-5x+6)^2} = \frac{2-(x-1)^2}{(x^2-5x+6)^2}$ туундусу

$x_1 = 1 - \sqrt{2}\,,\ x_2 = 1 + \sqrt{2}$ чекиттеринде нөлгө тең болуп, алар аркылуу өткөндө белгилери өзгөрүп, тиешелүү түрдө бул чекиттер функциянын минимум жана максимум чекиттери болушат.

$\left[1-\sqrt{2}\,,2\right[$ жана $\left]2\,,1+\sqrt{2}\right]$ аралыктарында туундусу оң болгондуктан, монотондуу өсөт, ал эми $\left]-\infty\,,1-\sqrt{2}\right[$ жана $\left]1+\sqrt{2}\,,+\infty\right[$ аралыктарында $y' = f'(x) < 0$ болуп, монотондуу кемийт.Берилген функция мезгилсиз, жуп да эмес жана так да эмес функция болот.



1-схема

2).$y = \frac{x^3-2x+1}{x^2+1}$ буруш бөлчөк $(n = 3 > m = 2)$ функциясы болот. Буруш бөлчөк функциянын алымын бөлүмүнө 1 – схема боюнча бөлүү менен, дурус бөлчөккө айлантып алалы.

Анда $y = \frac{x^3-2x+1}{x^2+1} = x - \frac{3x-1}{x^2+1}$ бүтүн жана дурус бөлчөк көрүнүштөгү рационалдык функцияны алабыз.

6.2.2 Көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялар

1. Көрсөткүчтүү функциялар.

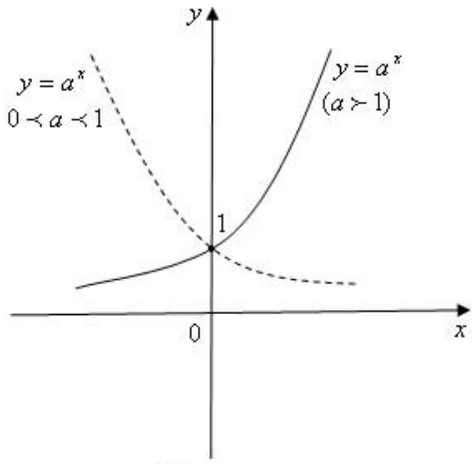
Негизи a саны болгон көрсөткүчтүү функция деп, $y = a^x$ көрүнүштөгү функцияны айтабыз. Мында a турактуу, бирден айырмалуу оң чыныгы сан **деген талап** коюлат **(**$a > 0,\ a \neq 1,\ a \in R$). $a = e$ болгондо, $y = e^x$ көрсөткүчтүү функциясын кээде $y = exp\,x$ көрүнүштө жазып, "экспонента икс" деп окушат. Көрсөткүчтүү функциялар ыкчам өсүүчү жана кемүүчү процесстерди математикалык тилде моделдештирүүдө колдонулат.

∘ $a < 0$ болсо, анда айрым бир x чекиттеринде $y = a^x$ функциясын маанилери жашабайт, б.а. аларды аныктоо мүмкүн эмес. Мисалы $x = \frac{1}{2}$, $a = -5$ болсо, $y = (-5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-5}$ келип чыгып, терс сандан квадраттык тамыр чыкпагандыктан, функциянын мааниси аныкталбайт. Ошондуктан $a > 0$ талабы коюлган.

∘$a = 1$ болсо, $y = a^x = 1^x = 1$ келип чыгып, $y = 1$ түзүнө ээ болобуз. Бул түз жөнөкөй жана белгилүү болгондуктан, ага токтолуунун зарылчылыгы жок ($a \neq 1$).

Коюлган шарттардын чегинде $y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясы $X \equiv R -$ аныкталуу областына, $Y =]0, +\infty[-$ өзгөрүү областына ээ облуп, аларды бири – бирине өз ара бир маанилүү чагылтып турат. $0 < a < 1$ болгондо $y = a^x$ функциясы X көптүгүндө монтондуу кемүүчү, ал эми $a > 1$ болгондо монотондуу өсүүчү функция болот. Чынында эле $\forall\, x_1,\ x_2 \in X: x_1 < x_2 \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1 > 0$ айырмасы оң болот. Функциянын тиешелүү маанилеринин айырмасын

$\Delta y = \mathfrak{f}(x_2) - \mathfrak{f}(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1+\Delta x} - a^{x_1} = a^{x_1} \cdot (a^{\Delta x} - 1)$ көрүнүшүндө жазып, Δy тин белгиси $a^{\Delta x} - 1$ санын белгисине байланыштуу болорун көрөбүз. Анткени биринчи көбөйтүүчүар дайым оң сан болуп



6.28 – чийме

$(a^{x_1} > 0)$, көбөйтүндүнүн белгисине таасирин тийгизбейт. Ошентип

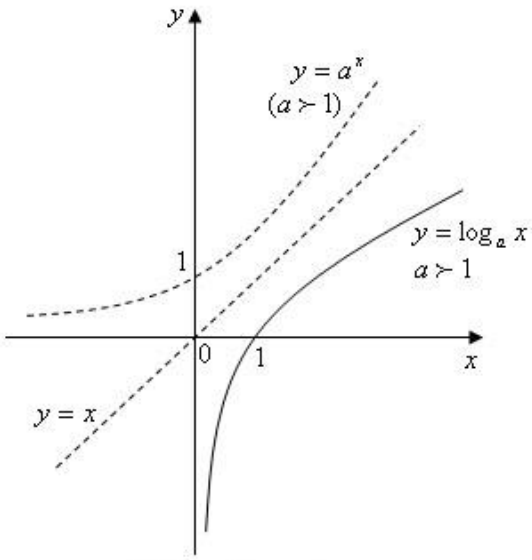
$0 < a < 1$ болгондо $a^{\Delta x} < 1$ болгондуктан,

$a^{\Delta x} - 1 < 0$ терс болуп, $\Delta x > 0$ же

$x_2 > x_1$ болгондо

$\Delta y = \mathfrak{f}(x_2) - \mathfrak{f}(x_1) < 0$ же

$\mathfrak{f}(x_2) < \mathfrak{f}(x_1)$ келип чыгат. Бул учурда аргументтин чоң маанисине функциянын кичине мааниси тиешелеш коюлуп, көрсөткүчтүү функция 6.2 – аныктаманын негизинде монотондуу кемүүчү болот (6.28 – чийме). Ошондой эле $a > 1$ болгондо



6.29 – чийме а)

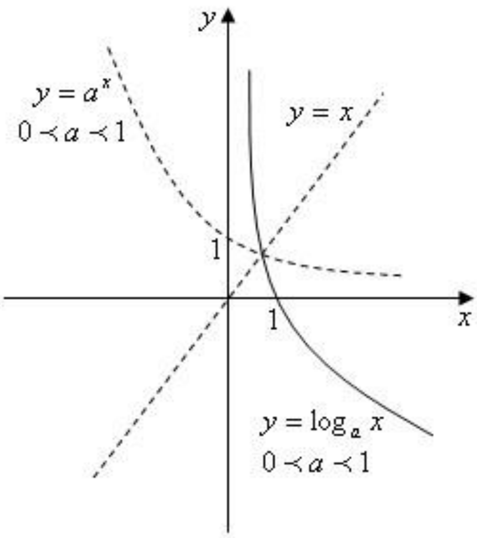
$a^{\Delta x} > 1$ же $a^{\Delta x} - 1 > 0$ келип чыгып,

$\Delta y = \mathfrak{f}(x_2) - \mathfrak{f}(x_1) > 0$ же

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ аргументтин чоң маанисине функциянын да чоң мааниси тиешелеш коюлуп, функция монотондуу өсүүчү болот (6.28 - чийме). $0 < a < 1$, $a > 1$ учурларынын экөөсүндө тең функциянын графиктери (0; 1) чекити аркылуу өтүп (себеби $a^0 = 1$), $y = 0$ ($0x$ огу) жантык асимптота түзү болот. Көрсөткүчтүү функция жуп да эмес, так да эмес, мезгилсиз функция болот.

2. Логарифмалык функция.

$y = a^x$ көрсөткүчтүү функциясы өз ара бир маанилүү чагылтууну ишке ашыргандыктан, анын тескери функциясы жашайт. $y = a^x$ теңдештигинен табылган x өзгөрүлмөсүн, $x = \log_a y$ символу менен белгилеп, аны “a негизи боюнча y өзгөрүлмөсүнүн логарифми “ деп окуйбуз. Тескери функцияны жазуу эрежесине ылайык, x менен yөзгөрүлмөлөрүнүн орундарын алмаштырып жазып, $y = a^x$ функциясына тескери болгон $y = \log_a x$ көрүнүштө жазылган логарифмалык функцияны алабыз. Мында $a > 0$, $a \neq 1$, $a \in R$ деп кабыл алынат. Өз ара тескери функциялардын аныкталуу жана өзгөрүү областтары алмашкандыктан, логарифмалык функциянын аныкталуу областы X = $]0\,,+\infty[\, \equiv R$, ал эми өзгөрүү областы Y = $]-\infty\,,+\infty[$ көптүктөрү болушат. Оң функция монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болсо, тескериси да монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болгондуктан, көрсөткүчтүү функция сыяктуу эле логарифмалык функция да $0 < a < 1$ шартында монотондуу кемүүчү, $a > 1$ шартында монотондуу өсүүчү болот. Өз ара тескери функциялардын графиктери координаттык тегиздиктин $y = x$ биссектриса түзүнө карата симметриялуу жайгашкандыктан, $y = \log_a x$ тескери функциясынын графиги, анын оң функциясы болгон $y = a^x$ тин графигин, $y = x$ түзүнө симметриялуу которуу менен тургузулат (6.29 а.б. – чиймелер). Логарифмалык функция $x = 0$ (Оy огу) вертикалдык



6.29 – чийме б)

ассимптота түзүнө ээ болуп мезгилсиз, жуп да эмес, так да эмес функция болот.

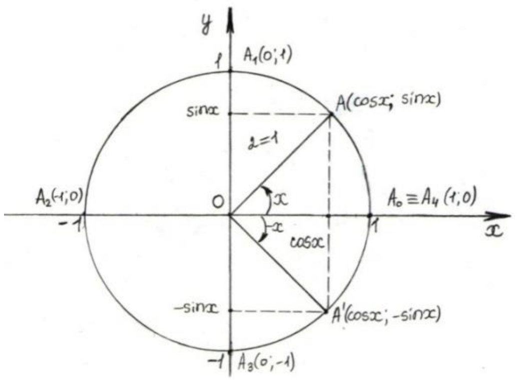
6.2.3 Тригонометриялык функциялар

Бурчтардын чоңдуктарын градус, секунда сыяктуу чен бирдиктери менен катар эле, мааниси чыныгы сан болгон радиан чен бирдигинин жардамы мененөлчөп жүрөбүз. Мисалы

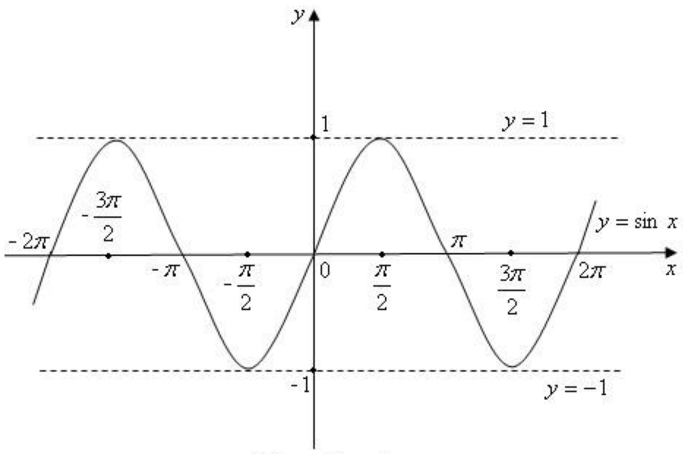
$\pi_{\text{радиан}} = 180\,°, \frac{\pi}{2} = 90°$, $\pi_{\text{радиан}} \approx 3{,}14$ чыныгы санына тең, ал эми

$1_{\text{радиан}} = \frac{180°}{\pi} = 57°17'45''$ градусту түзөт. Ошентип бурчтардын чоңдук өлчөмдөрүн жалаң гана градустар деп түшүнбөй, радиан менен алынган чыныгы сандар деп ойлоп, x өзгөрүлмө чыныгы саны менен өзгөрүлмө бурчтарды белгилеп, аргументтери –чыныгы сандар менен туюнтулган бурчтар болгон функцияларды түзүүгө болот.

1. Синус жана косинус функциялары. Борбору О координаталар башталмасында жайгашып, радиусу $r = 1$ болгон бирдик айланада жайгашкан чекиттердин координаталарын, борбордук бурч менен туюнтуу же алардын арасындагы көз карандылык байланышты орнотуу



6.30-чийме



6,31– чийме а)

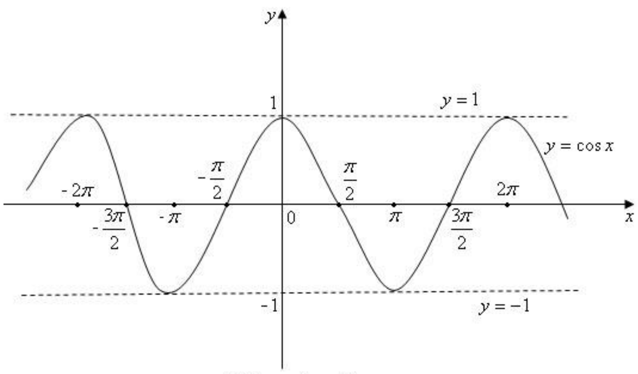
маселесине токтололу (6.30 - чийме). Берилген бирдик айланада эркин абалда жайгашкан А чекитин алып, ОА радиусун жүргүзөлү. Ox огу менен ОА радиусунун арасындагы бурчту x саны деп алалы. Тегиздикте жайгашкан ар кандай чекит сыяктуу эде, А чекитинин да эки сандардан турган түгөй координаталары бар. А чекитин x бурчуна тиешелеш коюлган чекит экендигин эске алып, анын координаталары болгон түгөй чыныгы сандарын символикалык түрдө $(\cos x\,; \sin x)$ көрүнүштө белгилейли.

Бул жаңы белгилөө менен киргизилген чыныгы сандарды тригонометриялык сандар деп атап, А чекитинин абциссасын

$\cos x -$ “косинус икс” , ординатасын $\sin x -$ “синус икс” деп айтып окуйбуз. А чекити бирдик айланага таандык болуп, айлананын радиусу $r = |\mathrm{OA}| = 1$ санынан ашып кетпегендиктен, А чекитинин координаталары катарында киргизилген тригонометриялык сандар $-1 \leq \cos x \ \leq 1$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ аралыктарынан чыгып кете албайт. x өзгөрүлмө бурчу саат жебесине каршы багытта оң сан, ал эми саат жебеси боюнча багытта терс сан болуп, О башталмасын айланасында айлануу менен бардык R= $]-\infty, +\infty[$ чыныгы сандарын кабыл алып чыгуусу мүмкүн. Ошондуктан $y = \sin x$, $y = \cos x$ белгилөөлөрүн киргизип, аларды X = $]-\infty, +\infty[\ \equiv R$ көптүгүн,

Y = $[-1\ ,\ 1]$ көптүгүнө чагылтуучу көз карандылык байланыштарын орноткон эрежелер катарында, аныкталуу областы $X =]-\infty, +\infty[$, өзгөрүү областы $Y = [-1\ ,\ 1]$ көптүктөрү болгон тригонометриялык функциялар деп атайбыз. Тригонометриялык функциялар чөйрөдөгү термелүү прцесстерин математикалык тилдеги мделдерин түзүүдө колдонулат.

1).6.30 – чиймеден көрүнгөндөй $x = 0$ болсо, А $(\cos x\,; \sin x)$ координаталуу чекити $\mathrm{A}_0(1; 0)$ чекитинин абалына келсе, $\cos 0 = 1\,, \sin 0 = 0$ болорун көрөбүз. Эгерде $x = \frac{\pi}{2}$ болсо, А чекити $\mathrm{A}_1(0; 1)$ чекитине которулуп $\cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1$ келип чыгат. $x = \pi$ болсо,А чекити $\mathrm{A}_2(-1; 0)$ чекитине



6.31– чийме б)

айланып, $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ болот. $x = \frac{3\pi}{2}$ болсо, А чекити $\mathrm{A}_3(0; -1)$ чекитине өзгөрүп $\cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \ \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ маанилерине ээ болобуз. Ал эми $x = 2\pi$ болсо, А чекити $\mathrm{A}_4(1; 0) \equiv \mathrm{A}_0(1; 0)$ бирдик айлананы толук айланып кайтып келет же координаталары $\cos 0 = 1, \sin 0 = 0$ маанилерине экинчи жолу ээ болот. Ушул процессти улантып олтуруп $y = \sin x$, $y = \cos x$ тригонометриялык функцияларын маанилери, улам бир толук айлануудан кийин кайра кайталанып, мурдагы маанилерин ала бергенин сезебиз. Ошентип

$\mathrm{Sin}(x+2\pi n)=\sin x$, $\cos(x+2\pi n)=\cos x$ теңдештиктери орун алат. $n=1\,,2\,,3,\ \ldots$ айлануулардын санын көрсөтүп, $y=\sin x$, $y=\cos x$ функциялары болсо, $\mathrm{T}_n= 2\pi n$ мезгилдерине ээ болушат. Бирок алардын мезгили 6.4 – аныктама боюнча бир гана Т саны болгондуктан, мезгил деп $\mathrm{T}=\min\{\ \mathrm{T}_n\ \}=2\pi$ оң санын алабыз. Алардын графиктерин $x\in[0\ ,\ 2\pi]$ аралыгындагы маанилери боюнча тургузуп, калган аралыктарга кайталап сызып чыгуу жетиштүү болот (6.31а.б. – чиймелер).

2). Эгерде x бурчун каршы багыттагы $"-x"$ бурчуна алмаштырсак, анда А $(\cos x\,;\sin x)$ чекити $A'(\cos(-x)\,;\sin(-x))$ чекитине өзгөрөт. А жана A' чекиттери Оx огуна карата симметриялуу жайланышкандыктан, $A'(\cos(-x)\,;\sin(-x))\equiv A'(\cos x\,;-\sin x)$ координаталары менен жазылып,

$\cos x\ =\cos(-\,x)$ жана $\sin(-x)=-\sin x$ теңдештиктерине ээ болобуз.

Мындан $y=\cos x$ функциясы $f(-x)=f(x)$ шартын канааттандырып, жуп функция болорун жана графиги Оy огуна карата симметриялуу жайгашары келип чыгат. Ал эми $y=\sin x$ функциясы $f(-x)=-f(x)$ шартын канааттандыргандыктан так функция болуп, графиги О башталма чекитине карата симметриялуу жайгашат.

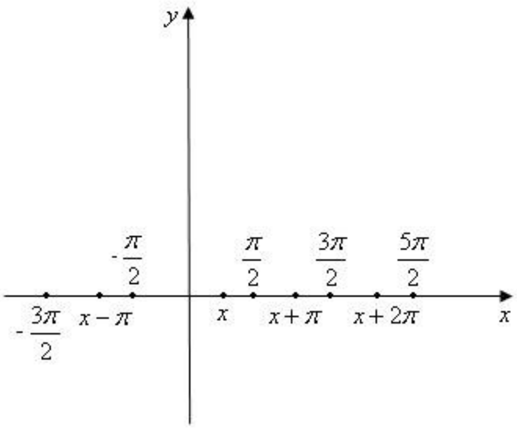
3). 6.31а.б. – чиймелеринен $y=\sin x$, $y=\cos x$ функцияларын бири – биринен Оx огу боюнча $\frac{\pi}{2}$ аралыгына которуштурулган, бир эле функция экендигин байкайбыз. Демек,

$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$теңдештиги орун алып, $y=\sin x$ функциясы $y=\cos x$ функциясына караганда $\frac{\pi}{2}$ санына мурда келген, ошол эле функциянын кайталанышы болуп эсептелет. Мындай бир эле функциянын белгилүү аралыктан кийин кечигип кайталанышы, математикада гармоникалык термелүү кубулуштарын моделдештирүүдө пайдаланылгандыктан, $y=\sin x$, $y=\cos x$– функцияларын гармоникалык функциялар деп да аташат. Ал эми алардын графиктери кубалашкан толкундарды элестетишет.

4). $y = \sin x$ функциясы $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ аралыгында монтондуу өсүүчү болуп, аргументтердин ар башка маанилерине функциянын да Y = $[-1, 1]$ аралыгындагы ар башка маанилери тиешелеш коюлгандыктан (чоңуна чоңу, кичинесине кичинеси), өз ара бир маанилүү функция боло алат. Бирок жалпы $X =]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областынын чегинде кайталанма мүнөзгө ээ болгондуктан, $y = \sin x$ ти X көптүгүндө (аныкталуу областында) көп маанилүү функция дейбиз. Ошондуктан $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ аралыгында гана $y = \sin x$ теңдештигинен, x өзгөрүлмөсүн бир маанилүү таба алабыз. Бул табылган маанини

$x = \arcsin y$ символу менен белгилеп, “ икс барабар арксинусигрэк” – деп окуйбуз.

$y = \sin x$ функциясы T = 2π мезгилине ээ болгондуктан, анын

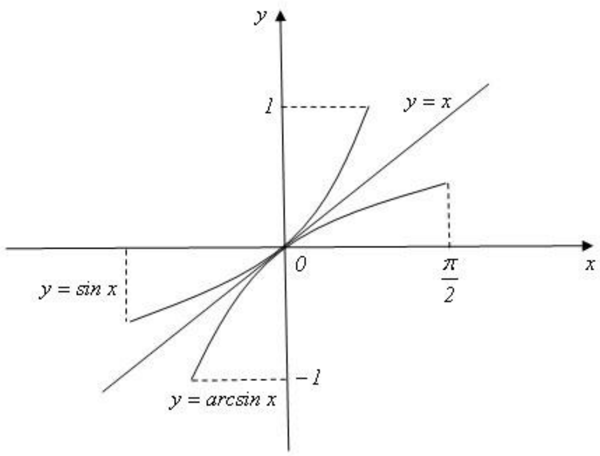


6.32 – чийме

$X =]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областын $\left[\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right]$ сыяктуу

$(k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots)$ сегменттердин биригүүсү катарында карап (6.32 – чийме), ар бир сегменттерде $y = \sin x$ теңдештигинен, x өзгөрүлмөсүн бир маанилүү таап, табылган маанилерди бардык сегменттер үчүн жалпылап,

$$x = \arcsin y + \pi k \ (k \in Z)$$



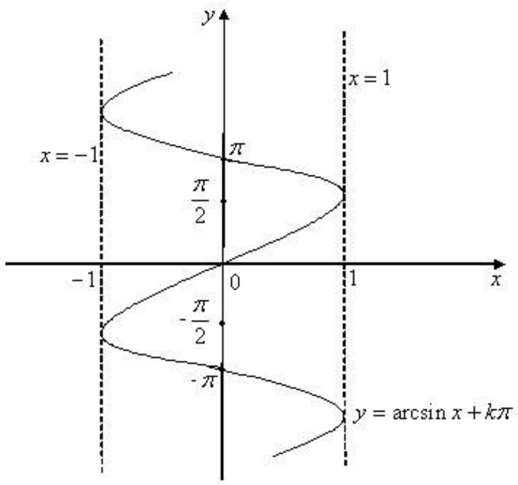
6.33 – чийме

көрүнүшүндө жазуу мүмкүн. Ошондуктан мындай x маанисин бүтүндөй X = $]-\infty, +\infty[$ сан огуна улаштыра жайылтып, жалпы учурдагы $y = \sin x$ функциясына тескери болгон $x = \arcsin y + \pi k$ $(k \in Z)$ функциясын түзүүгө болот.

Тескери функцияны жазуу эрежесин карап, x менен y өзгөрүлмөлөрүнүн орундарын алмаштырып жазып, тескери функцияны Оy огу боюнча

$y = \arcsin x + \pi k (k \in Z)$ эрежеси менен уланта алабыз. Өз ара тескери функциялардын аныкталуу областы менен өзгөрүү областын орундары алмашкандыктан, табылган тескери функциянын аныкталуу областы X = $[-1 , 1]$ сегменти, өзгөрүү областы Y = $]-\infty , +\infty[\equiv R$

болот. Тескери $y = \arcsin x$ функциясын графиги,



6.34 – чийме

$y = \sin x$ функциясын

графигин $\left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде $y = x$ түзүнө карата симметриялуу которуу менен сызылып (6.33 – чийме), андан кийин жалпы $Y =]-\infty , +\infty[$ аралыгына

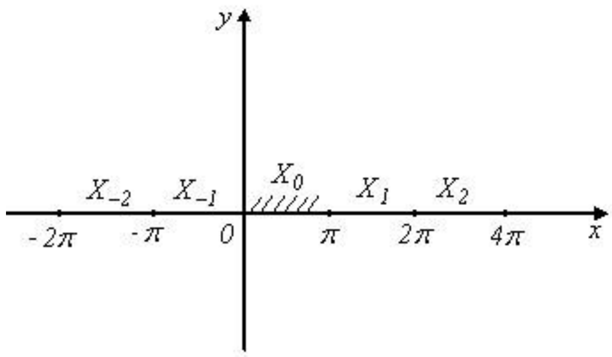
$y = \arcsin x + \pi k$ маанилери боюнча улантылат (6.34 –чийме).

5).$y = \cos x$ функциясын

$X =]-\infty , +\infty[\equiv R$ аныкталуу областын

$$X_k = [\pi k , \pi(k+1)]$$

сегменттерине бөлүп $(k \in Z)$, сан огун алардын биригүүсү



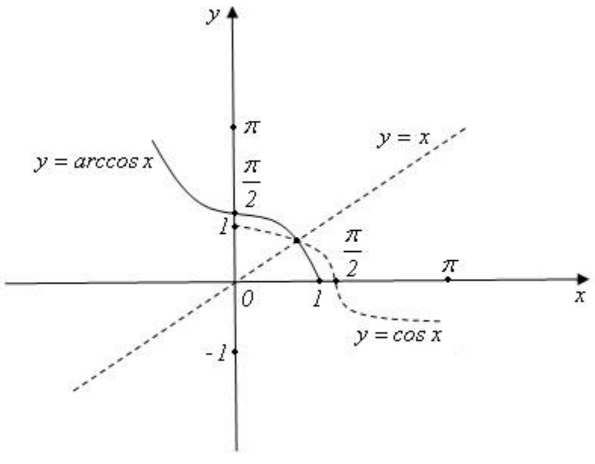
6.35 – чийме

катарында элестетели (6.35 – чийме). Анда $y = \cos x$ функциясы бул сегменттердин ар бирин өз - өзүнчө, Y = $[-1 , 1]$ сегментине өз ара бир маанилүү чагылтып, ар бир аралыктардын өзүнө ылайыкташкан тескери функциялары табылат же жашайт. Мисалы $k = 0$ болсо, $X_0 = [0 , \pi]$ сегменти келип чыгып, бул аралыкта $y = \cos x$ функциясы монотондуу кемүүчү болуп, ар кандай x аргументтерине, функциянын ар кандай y маанилери тиешелеш коюлуп, $\forall x_1, x_2 \in X_0$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ шарты аткарылат. Ошондуктан X_0 аралыгы, Y = $[-1 , 1]$ аралыгына өз ара бир маанилүү чагылтылып (монотондуу функция катарында), тескери функция табылат же жашайт. Демек берилген аралыкта $y = \cos x$ теңдештигинен x өзгөрүлмөсүн бир маанилүү табууга болот.

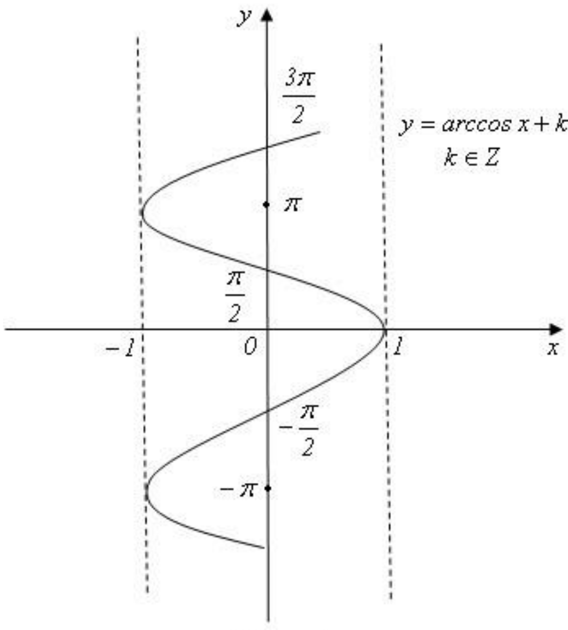
Табылган маанини $x = \arccos y$ символу менен белгилеп, “икс барабар арккосинусигрэк“ – деп окуйбуз.

Ар бир $X_k = [\pi k\ ,\ \pi(k+1)\ ]$ сегменттеринин өзүндө $y = \cos x$ теңдештиктерин x өзгөрүлмөлөрүнө карата чыгарып чыксак, анда бул xөзгөрүлмөлөр бири - биринен πk кошулуучуларына гана айырмаланып, $x = \arccos y + \pi k, k \in Z$ көрүнүштөрдө жазылышат. Ошентип $X_k = [\pi k\ ,\ \pi(k+1)\ ]$ сегменттерин кыялыбызда улаштырып, $y = \cos x$ теңдештигин (теңдемесин) бүтүндөй $X =]-\infty\ ,+\infty[\ \equiv R$ аралыгында x ке карата чыгарылышын, $x = \arccos y + \pi k, k \in Z$ көрүнүштө белгилеп жазабыз.

Тескери функцияны жазуу эрежеси боюнча x менен y өзгөрүлмөлөрүнүн орундарын



6.36 – чийме



6.37 – чийме

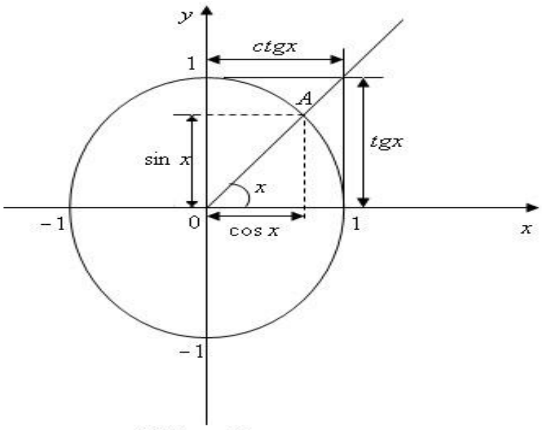
алмаштырып, $y = \cos x$ функциясын $X_0 = [0\ ,\ \pi]$ сегментиндеги тескери функцияны $y = \arccos x$ көрүнүштө жазабыз. Табылган тескери функцияны Оy огу боюнча $y = \arccos x + \pi k$ эрежеси менен улантабыз. Жалпы учурда аныкталуу областы X = $[-1\ ,1]$, өзгөрүү областы Y = $]-\infty\ ,+\infty[\ \equiv R$ болгон, тескери $y = \arccos x$ функциясын түзгөн болобуз. Тескери функциянын графигин, адегенде $X_0 = [0\ ,\ \pi]$ сегментиндеги $y = \cos x$ функциясынын графигин $y = x$ түзүнө симметриялуу котоpуу менен тургузуп (6.36 – чийме), андан кийин Оy огу боюнча$y = \arccos x + \pi k$ маанилерине карап улантып сызабыз (6.37 – чийме).

6). Өз ара тескери функциялардын суперпозицияларын түзүп, (6.4) формулаларын пайдалансак, төмөндөгүдөй теңдештиктер келип чыгат:

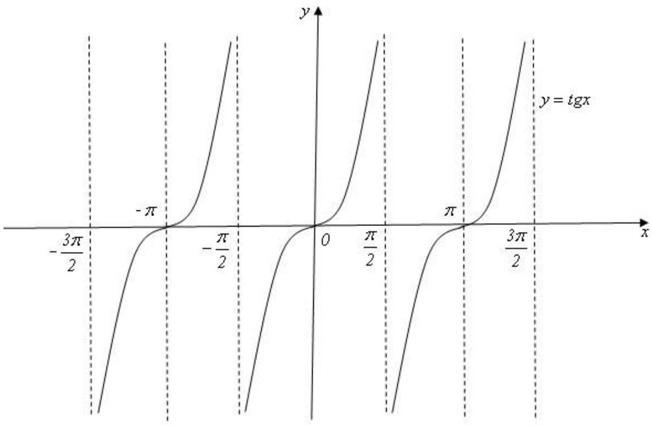
$\sin(\arcsin x) = x$, $\arcsin(\sin x)=x$, $\arccos(\cos x) = x, \cos(\arccos x) = x$.

Аларды пайдаланып $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$,

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$ ээ болобуз. Мында



6.38 – чийме



6.39 – чийме

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ деп эсептеп, квадраттык тамырлардын оң белгилерин алабыз. Дагы бир

$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ теңдештигин далилдейли. Аны

$\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$ көрүнүштө жазып,

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$ формуласын пайдалансак,

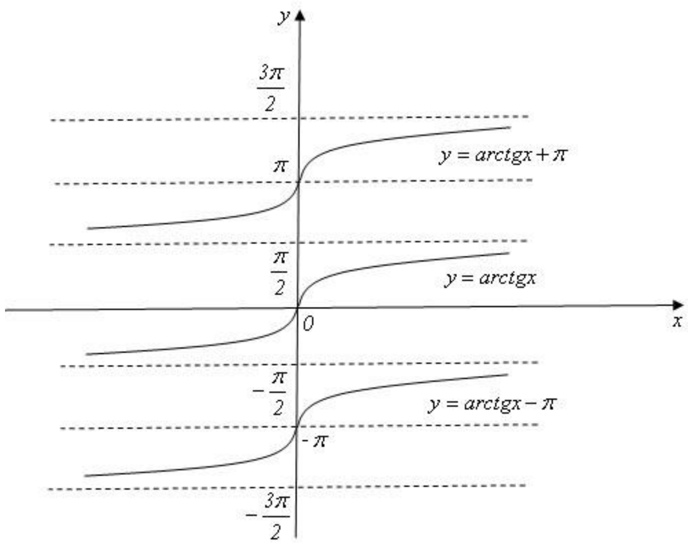
$\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x) \cdot \sin(\arccos x) = x^2 +$
$+(\sqrt{1-x^2})^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$ келип чыгып, теңдештиктин туура экендиги далилденет.

2. Тангенс жана котангенс функциялары.

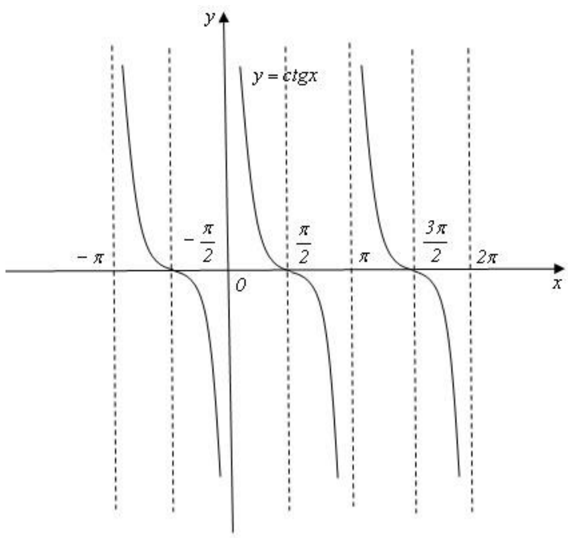
1). $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ функциясын тангенс функциясы деп атап, $y = tgx$ символу менен белгилейбиз. $y = tgx$ функциясы бөлчөктүн бөлүмү $\cos x \neq 0$ же $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, шарттары аткарылган кезде гана жашагандыктан, аныныкталуу областы

$X_k = \left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\,,\ \frac{\pi}{2}(2k+1)\right[\ (k \in Z),$ өзгөрүү областы $Y =]-\infty\,,+\infty[\ \equiv R$ көптүктөрү болушат. Ошентип $y = tgx$ функциясы ар бир X_k интервалдарын өз - өзүнчө, Y көптүгүнө өз ара бир маанилүү чагылтуу кызматын аткарып, $x = \frac{\pi}{2}(2k-1)$ жана $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$ вертикалдык асимптота түздөрүнө ээ, анткени бул чекиттерде бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланып, өзгөчө абалдар орун алышат же функциянын маанилери чексизге умтулуп жашабайт. $y = tgx$ функциясын мааниси менен, x бурчунун чоңдугу кандай байланышканын, жогорудагы бирдик айлананын жардамы менен геометриялык жактан көрсөтүүгө болот (6.38 – чийме). Тангенс функциясынын графигин ар бир X_k интервалдарында өз - өзүнчө тургузабыз.

Мисалы $k = -1,\ 0,\ 1$ болгон учурлардагы $X_{-1}\,,\ X_0\,,\ X_1$ интервалдарындагы графиктери, 6.39 – чиймедеги көрүнүштөрдө болушат. $y = tgx$ бир эле функция болуп эсептелгени менен, ар бир X_k интервалдарында ар башка функция сыяктуу элести калтырат. Ошондой болсо да $f(x+\mathrm{T})==$ $tg(x+\pi) = tgx = \mathrm{f}(x)$ шартын



6.40 – чийме



6.41 – чийме

канааттандыруучу, $\mathrm{T} = \pi$ оң саны табылгандыктан, тангес функциясын π мезгилдүү функция деп, графиктери X_k интервалдарында π аралыгынан кийин кайра кайталанып турат деп түшүнөбүз.

$tgF(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx$ аткарылгандыктан, ар бир

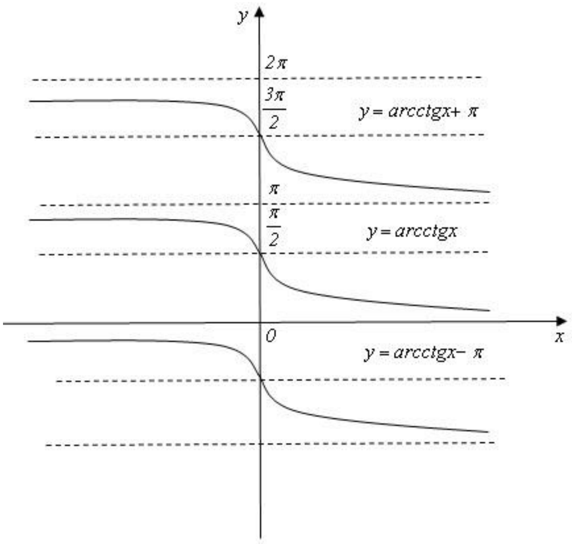
$\left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\right., \frac{\pi}{2}(2k+1)\left[\right. (k \in Z)$ аралыктарында так функция болот.

Ар бир

$X_k = \left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\right., \frac{\pi}{2}(2k+1)\left[\right. (k \in Z)$ аралыктарында тангенс функциясы монотондуу өсүүчү болуп, өз ара бир маанилүү чагылтууну ишке ашыргандыктан, анын тескери функциясы жашайт же табылат. Демек $y = tgx$ теңдештигин x өзгөрүлмөсүнө карата чыгарууга болот. Табылган x ти $x = arctg\, y$ символу менен белгилеп, аны "икс барабар арктангенсигрэк" - деп окуйбуз.

Тескери функцияны жазуу эрежесине таянып, x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, аныкталуу областы

X≡ R ,өзгөрүү областы $Y_k = \left]\frac{\pi}{2}(2k-1)\right., \frac{\pi}{2}(2k+1)\left[\right.$



6.42 – чийме

$(k \in Z)$ болгон, тангенс функциясына тескери

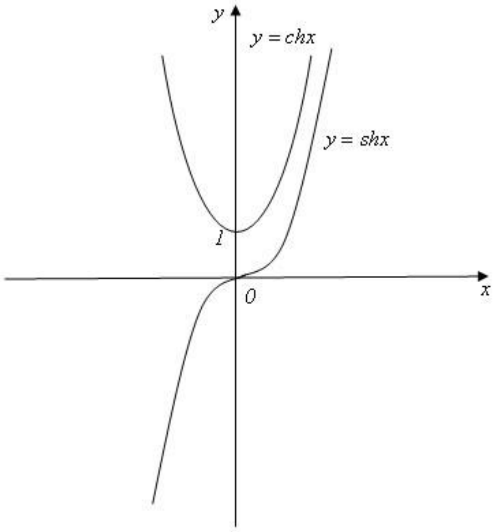
$y = arctgx + k\pi$ функцияларын алабыз (6.40 – чийме).

$Y_0 = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ интервалында арктангенс функциясы $y = arctg\, x$ көрүнүштө жазылат.

2). $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ көрүнүштөгү функцияны котангенс функциясы деп, символикалык түрдө$y = ctg\, x$ деп белгилейбиз. Анын аныкталуу областы $\sin x \neq 0$ шартын канааттандыруучу $x \neq \pi k$ чыныгы сандары, же

$X_k =]\pi k, \pi(k+1)[\ (k \in Z)$ интервалдары, ал эми өзгөрүү областы Y≡ R көптүгү болушат. x бурчу менен котангенс функциясын байланышы, бирдик айлананын жардамы менен 6.38 – чиймеде көрсөтүлгөн. Арктангенс функциясына да ,тангенс функциясы сыяктуу талдоолорду жүргүзүү менен, анын Т = π мезгилдүү, так жана X_k областтарында монотондуу кемүүчү болуп, тескери функциясы жашарын билебиз. Тескери функция $y = arcctg\, x$ көрүнүштө белгиленип жазылып, X$\equiv R$ - аныкталуу областына,

$Y_k =]\pi k\,,\ \pi(k+1)\ [\ ,\ \ (k \in Z)$ – өзгөрүү областына ээ болот. $y = ctg\, x$ жана $y = arcctg\, x$ функцияларынын графиктери 6.41, 6.42 – чиймелерде көрсөтүлгөн.



6.43 – чийме

3).Тангенс жана котангенс функциялары менен өз ара тескери функциялардын суперпозицияларын түзүп,

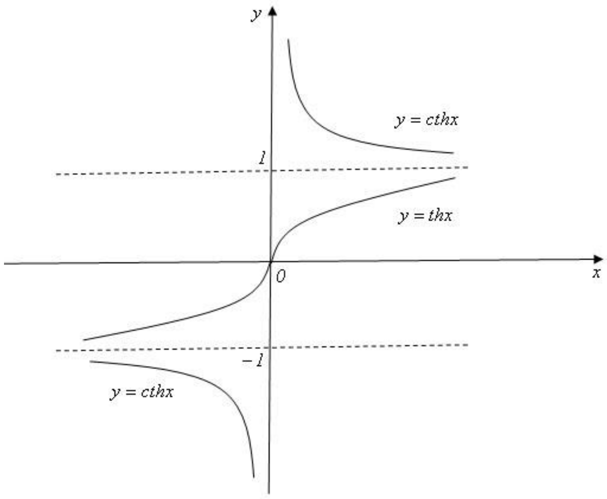
$tg(arctg\, x) = arctg(tg\, x) = x,$

$ctg(arcctg\, x) = arcctg(ctg\, x) = \ x\ ,$

$arctgx + \ arcctg\, x = \frac{\pi}{2}$ формулаларын алабыз. Ошондой эле $arctgx = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\arcsin x = \ arcctg\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ байланыш формулаларын келтирип чыгарууга болот.

6.2.4 Гиперболалык функциялар

Негизи e саны болгон $y = e^x$ көрсөткүчтүү функцияларынын суперпозициясынан турган



6.44 – чийме

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ функциясын гиперболалык синус функциясы деп, $y = sh\, x$ символу менен белгилейбиз. Ошондой эле

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch\, x$ – гиперболалык косинус, $y = \frac{sh\, x}{ch\, x} = \ th\, x$ - гиперболалык тангенс $(ch\, x \neq 0)$, $y = \frac{ch\, x}{sh\, x} = \ cth\, x$ – гиперболалык котангенс $(sh\, x \neq 0)$ функциялар деп аталышат.

$y = sh\,x$ так , ал эми $y = ch\,x$ жуп функциялар болушуп, $X \equiv R$ көптүгүндө аныкталышат. Бул эки функциялардын графиктери 6.43 – чиймеде көрсөтүлгөн. Алардын гиперболалык синус, косинус функциялары деп аталышынын себеби, айрым касиеттеринин тригонометриялык функциялардын касиеттерине окшоп кеткендигинде. Чынында эле

$ch(a \pm b) = ch\,a \cdot\ sh\,b\ \pm\ chb \cdot sh\,a$,

$sh\,(a \pm b) = sh\,a \cdot\ ch\,b\ \pm sh\,b \cdot ch\,a$ теңдештик формулаларынын орун аларын текшерип көрүүгө болот.

$y = th\,x,\ \ y = cth\,x$ функцияларынын графиктери 6.44– чиймеде көрсөтүлгөн.

Гиперболалык функциялар аныкталуу областтарында өз ара бир маанилүү чагылтууларды ишке ашырышкандыктан, алардын тескери функцияларын табууга болот.

Эскертүү: *Каралган элементардык функцияларды алгебралык, иррационалдык, трансценденттик деп бөлүп да айтышат. Эгерде функцияны берүү эреже – мыйзамы арифметикалык төрт амалдар жана бүтүн даражага көтөрүү катышкан формулаларга негизделсе, анда аны алгебралык функция дешет. Демек даражалуу, көп мүчө, рационалдык функциялар алгебралык функцияларга киришкени менен, аларда радикалдар (тамыр чыгаруу талабы) катышып калса, иррационалдык функциялар болуп калышат. Арифметикалык төрт амалдан башка, жаңы символ - тамгалар менен белгиленген* $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, a^x *сыяктуу амалдар катышкан функциялар трансценденттик функциялар болушат.*

Бардык алгебралык, иррационалдык, трансценденттик функциялар жана алардын ар кандай суперпозицияларынантурган функциялар, элементардык функциялардын классы деген атты алган.

6.2.5 Атайын функциялар

Функцияларды аналитикалык жол менен берилүү ыкмаларынын көпчүлүгү, арифметикалык амалдарга негизделген формулалар болушса, айрымдары геометриялык ченөө амалдары менен байланышат.

Мисалы бирдик тегеректеги бурчтарды, жааларды, кесиндилерди сандар менен ченөө эрежелеринен тригонометриялык функциялар түзүлгөн. Бирок практикалык колдонууларда функцияларды түзүүнү чектебестен, кеңири мааниде же жаратылыш кубулуштарынын табиятын түшүндүрүүчү жана аларды чечмелөө жолунда колдонууга мүмкүн болгон аппарат (каражат) катарында түшүнүү зарылчылыгы келип чыгат.

Адам баласынын дүйнө таануу жолунда, бирде теориялык изилдөө алдыга кетсе, бирде практикалык байкоодон келип чыккан жыйынтыктар алдыга кетип олтурат. Мисалы 1929 - жылы англиялык математик – физик Поль Адриен Мерис Дирак, электр жана магнит талааларында өтө тез ылдамдык менен кыймылдаган электрондун абалын мүнөздөөчү функцияны сунуш кылып, теориялык жактан кванттык физикага олуттуу жаңылык киргизген. Анын бул теориясы убагында колдоо таппаса да, 1932 – жылы экспериментте ырасталып, электрондун анти бөлүгү болгон оң заряддуу – позитрон табылган соң, окумуштуулар дүйнөсүндө чоң сенсацияны жараткан. Ошентип биринчи жолу Дирактын “Кванттык механиканын принциптери” аттуу эмгегинде колдонулган функция, дельта – функция деген ат менен белгилүү болуп, тажрыйба менен теориянын бирин - бири толуктап, жетелеше жүргөнүнө мисал болуп калды.

6.7 Аныктама. *Дельта – функция деп*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

шартын канааттандыруучу,

$$\delta(x) = \begin{cases} 0\,, \text{эгерде } x \neq 0,\ x < 0,\ x > 0 \text{ болсо,} \\ \infty\,, \qquad\qquad \text{эгерде } x = 0 \text{ болсо} \end{cases} \qquad (6.7)$$

символу менен белгиленген функцияны айтабыз.

Дельта – функциянын негизги өзгөчөлүгү болуп,

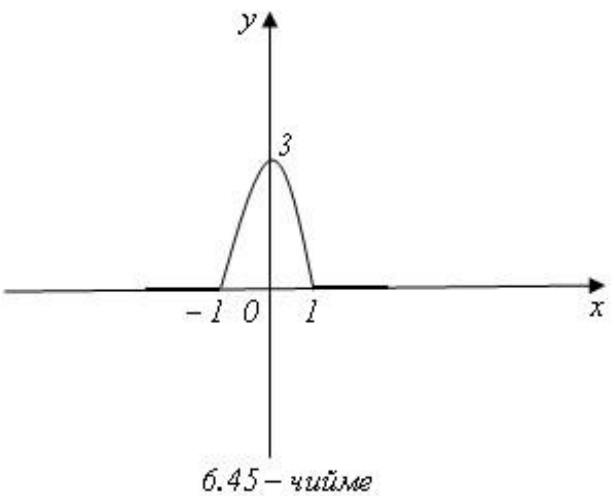
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}(x) \cdot \delta(x)\, dx = \mathfrak{f}(0) \qquad (6.8)$$

теңдештигинин жардамы менен, аны δ: $\mathfrak{f}(x) \rightarrow \mathfrak{f}(0)$ чагылтуусун ишке ашыруучу оператор катарында колдонууга мүмкүн экендиги эсептелет. x өзгөрүлмөсүн Ox огу боюнча a бирдик оң жакка жылдырып, (6.7) , (6.8) формулаларын

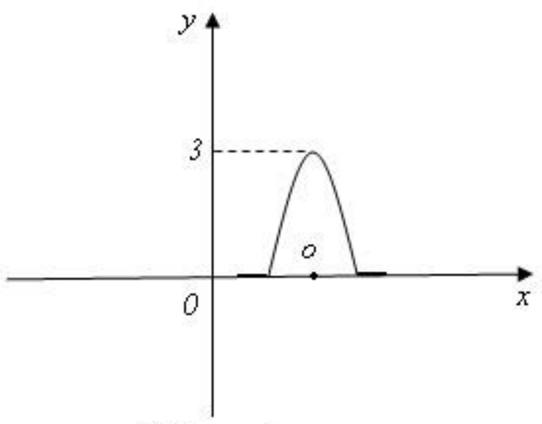
$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0\,, \text{эгерде } x \neq a,\ x < a,\ x > a \text{ болсо,} \\ \infty\,, \text{ эгерде } x = a \text{ болсо} \end{cases} \qquad (6.9)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{f}(x) \cdot \delta(x-a)\, dx = \mathfrak{f}(a) \qquad (6.10)$$

көрүнүштөрдө жазып, колдонууга болот.



6.45 – чийме



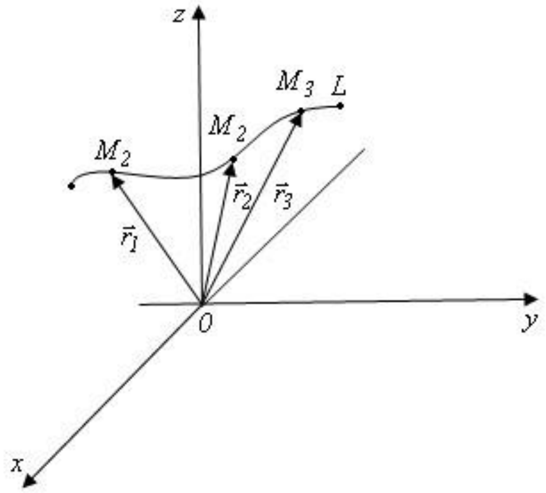
6.46 – чийме

Дельта – функциянын графигин
(6.7), (6.9) учурлар үчүн 6.45 , 6.46 – чиймелерде көрсөтөбүз.

Мындай кайсы бир атайын кубулуштарга ылайыкташып түзүлгөн функцияларды, атайын функциялар деп атайбыз. Математикада Дирактын атайын функциясынан башка Гриндин, Лагеррдин, Якобинин, Эрмиттин, Неймандын, Хиллдин, Вейерштрасстын ж.б.у.с., көптөгөн атайын функциялар кеңири колдонулуп жүрөт.

6.2.6 Скалярдык аргументтүү вектор – функция

Үч ченемдүүR^3 мейкиндигинде кандайдыр бир L траекториясы боюнча M материалдык чекити кыймылдап жүрсүн дейли (6.47 - чийме). Анда убакыттын ар бир t ирмеминдеги M чекитинин абалын: M чекитине туура келген $\vec{r}$ радиус векторун узундугу, багыты, $\vec{v}$ ылдамдыгы жана $\vec{a}$ ылдамдануусу аркылуу мүнөздөп аныктай алабыз. Ошондуктан бул векторлордун ар бирин t санына (скалярына) карата $\vec{r}=\vec{r}(t)$, $\vec{v}=\vec{v}(t)$, $\vec{a}=\vec{a}(t)$ көрүнүштөгү функциялар деп эсептөөгө болот.



6.47 – чийме

6.8 Аныктама.*Эгерде* t *скалярынын* $]\alpha,\ \beta[$ *интервалындагы ар бир маанисине, кайсы бир эреже – мыйзамдын негизинде бир* $\vec{a}$ *вектору тиешелеш коюлса, анда бул эреже – мыйзамды* $\vec{a}=\vec{a}(t)$ *көрүнүштө жазып, скалярдык аргументтүү вектор – функция дейбиз.*

Айталы $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$ векторлору $Oxyz$ - декарттык координаталар системасын орттору же базистик векторлору болушсун, анда $\vec{a}$ векторун базистик векторлор системасы боюнча ажыратып, $\vec{a}=\{x,y,z\}$ координаталары менен

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \qquad (6.11)$$

көрүнүштө жазууга болот. Эгерде t скалярына карата $\vec{a}=\vec{a}(t)$ вектор – функция болсо, анда анын координаталары да t га карата функция болушуп,

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \alpha<t<\beta \\ z=\eta(t), \end{cases} \qquad (6.12)$$

көрүнүштөгү параметрдик теңдеме менен жазылат. Бул учурда (6.11) вектор – функция катарында

$$\vec{a}(t)=\varphi(t)\vec{i}+\psi(t)\vec{j}+\eta(t)\vec{k} \qquad (6.13)$$

жазылат. Ошентип скалярдык аргументтүү $\vec{a} = \vec{a}(t)$ вектор – функциясын параметрдик (6.12) функциялар, же вектордук жазылыштагы (6.13) көрүнүштөрдө берүүгө болот.

М чекитин кыймылдаган издерин туташтыруучу L түзү, координата башталышы O(0; 0; 0) чекитинен чыгуучу $\vec{a} = \vec{a}(t)$ радиус – векторун учтары сызган ийри болуп эсептелип, вектор – функциянын годографы деп аталат. Ошентип (6.12) теңдештиги L ийрисинин параметрдик теңдемеси болсо, ал эми ийринин вектордук теңдемеси

$$\vec{a}(t) = \varphi(t)\vec{\imath} + \psi(t)\vec{\jmath} + \eta(t)\vec{k}, \quad \alpha < t < \beta (6.14)$$

көрүнүштөгү вектор – функцияболот.

2. Көнүгүүлөр

6.1 а) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, б) $\varphi(x) = \frac{|x-2|}{x+1}$ функциялары берилсе, анда $f(0)$, $f(2)$, $f(-1)f(-2)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(\sqrt{2})$, $\left|f(\frac{1}{2})\right|$ жана $\varphi(0)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(-2)$, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\varphi(\sqrt{2})$, $\left|\varphi(\frac{1}{2})\right|$ маанилерин тапкыла.

6.2 а) $\varphi(t) = t^3 + 1$ функциясы берилсе $\varphi(t^2)$, $\{\varphi(t)\}^2$ маанилерин тапкыла;

б) $z = e^{\sin(x+y)}$функциясынын $x = y = \frac{\pi}{2}$ чекитиндеги маанисин тапкыла;

в) $z = \left(\frac{arctg(x+y)}{arctg(x-y)}\right)^2$ функциясынын $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ чекитиндеги маанилерин тапкыла. (Жооптору: б) $\frac{9}{16}$; в) 1)

6.3 а) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ берилсе, $F(a) = F(-a)$; б) $f(t) = 2t^2 + \frac{2}{t^2} + + \frac{5}{t} + 5t$ берилсе, $f(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ болорун далилдегиле.

6.4 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ функциясы берилсе, а) $f(x) = f(0)$;

б) $f(x) = f(-1)$ теңдемелерин чыгаргыла. (Жообу а) 0, 2; б) – 1, 3)

6.5 $f(x) = x + 1$, $\varphi(x) = x - 2$ экендиги белгилүү болсо,

$|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$ теңдемесин чыгаргыла.

(Жообу $x \leq -1$ жана $x \geq 2$)

6.6 а) $y = z^2,\ z = x + 1$; б) $y = \sqrt{z+1},\ z = tg^2x$ функциялары берилсе, анда y ти x ке карата функция катары туюнтуп жазгыла.

в) $z = u^v$ татаал функциясында $u = x + y,\ v = x - y$ болсо, анда функциянын (0; 1), (1; 1), (2; 3), (0; 0) сыяктуу $(x; y)$ чекиттериндеги маанилерин тапкыла.

(Жообу а) $y = (x+1)^2$; б) $y = \left|\frac{1}{\cos x}\right|$; в) $1,\ 1,\ \frac{1}{5},$ аныкталбайт.)

6.7 $y = sinx$; $\gamma = \lg y$; $u = \sqrt{1+\gamma^2}$ берилсе, uөзгөрүлмөсүн xөзгөрүлмөсүнө карата функция катары жазгыла.

(Жообу $u = \sqrt{1 + (\lg sinx\ )^2}$)

6.8 Төмөндөгү татаал функцияларды элементардык функциялардын суперпозициялары катарында тизмектеп жазгыла.

а) $y = sin^3x$; $y = \sqrt[3]{(1+x)^2}$; $y = \lg(tgx)$; $y = sin^3(2x+1)$;

$$y = 5^{(3x+1)^2}.$$

6.9 Аныкталуу областарын тапкыла.

а) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; б) $y = \arccos(1-2x)$; в) $y = arcsin\sqrt{2x}$;

г)$y = arcsin\frac{x-3}{2} + \lg(4-x)$;д) $y = \lg\frac{x-5}{x^2-10x+24} - \sqrt[3]{x+5}$;

е)$y = \frac{1}{\sqrt{sinx}} + \sqrt[3]{sinx}$; ж)$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$; з) $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$;

и) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$; к)$z = arcsin\frac{y-1}{x}$; л) $z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

(Жооптору: а) $X =]-\infty,\ 1[\ \cup\ ]2, +\infty[$;

б) X= $[0,\ 1]$; в) X = $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$; г) X= $[1,\ 4[$; д) X= $]4,\ 5[\ \cup\ ]6, +\infty[$;

е)X= $]2k\pi,\ (2k+1)\pi[\ , k\epsilon Z$; ж) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$; з) $y^2 > 4x - 8$;

и) координаттык бурчтардын биссектрисаларын арасындагы

$x + y \geq 0,\ x - y \geq 0$ шарттарын канааттандыруучу чекиттер;

к)$1 - x \leq y \leq 1 + x$,$(x > 0)$ жана $1 + x \leq y \leq 1 - x$ $(x < 0)$. Ал эми

$x = 0$ болгондо функция аныкталбайт; л) $x^2 + y^2 = 1$ айланасы менен $y^2 = x$ парболасын кесилишин ички чекиттери Айлананын жаасы жана параболанын чокусу кирбейт) .

6.10 Функциялардын жуптугун жана тактыгын аныктагыла.

а)$y = x^4 - 2x^2$;б) $y = sinx - cosx$; в)$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$;г) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$;

д)$y = 2^x$; е)$y = \ln\frac{1-x}{1+x}$; (Жооптору: а) жуп; б) жуп да так да эмес; в) так;

г) жуп; д) жуп да так да эмес; е) жуп).

6.11 Берилген функцияга тескери функцияны тапкыла.

а)$y = 1 - 3x$; б)$y = \frac{1}{1-x}$; в)$y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$; г) $y = 1 + \lg(x + 2)$;

д) $y = \log_x 2$; е)$y = 10^x$; ж)$y = 4arcsin\sqrt{1 - x^2}$; (Жооптору:

а) $y = \frac{1-x}{3}$; б) $y = 1 - \frac{1}{x}$; в) $y = \pm\sqrt{x^3 - 1}$;г)$y = 10^{x-1} - 2$;

д) $y = \sqrt[x]{2}$; е) $y = \lg x$; ж) $y = \pm\sqrt{1 - sin^2\frac{x}{4}} = \pm\cos\frac{x}{4}$.)

VII ГЛАВА. ФУНКЦИЯЛАРДЫН ПРЕДЕЛДЕРИ

§ 7.1 Функциянын предели

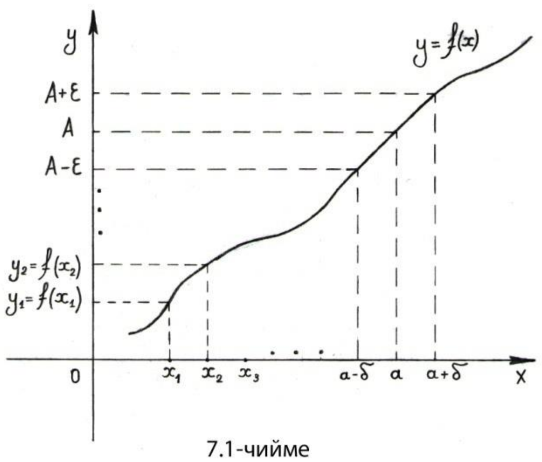
7.1.1 Функциянын чекиттеги предели

X көптүгүн Y көптүгүнө чагылтуучу $y = f(x)$ функциясы берилсин. X жана Y көптүктөрү R чыныгы сандарынын мейкиндигинде кармалып тургандыктан, алардын элементтерин коңшулук деңгээлге чейин таануу мүмкүн эмес экендигин (1- бөлүк, §1 , 1.1.4) билебиз. Ошондуктан X көптүгүндө аргументтердин a чекитине жакындап келүү же жыйналуу процессин, x аргументтери a чекитине жыйналуучу удаалаштыктын мүчөлөрү боюнча жүрүп олтуруп жетет деп элестетебиз

$$x_1, x_2, x_3, \ \ldots, \ x_n, \ldots \to a . \qquad (7.1)$$

Анда ушул чекиттерге тиешелүү болгон функциянын маанилери да, Y көптүгүндө $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$,$y_3 = f(x_3)$, . . ., $y_n = f(x_n)$, . . . сандарынан турган, кандайдыр бир A санына жакындап келүүчү же жыйналуучу

$$f(x_1), \ f(x_2), \ f(x_3), \ldots \ , f(x_n), \ \ldots \to A \qquad (7.2)$$



7.1-чийме

удаалаштыгын түзүшү мүмкүн (7.1 – чийме). Айтылган пикирди R мейкиндигинде киргизилген ченөө эрежеси – метриканын же аралыктардын тилинде, аныктама көрүнүштө жазалы.

7.1 Аныктама. *Жетишерлик кичине ε оң санынын кандай тандалганына карабастан, ага ылайыкталган жетишерлик кичине δ оң саны табылып, a чекитинин $\delta -$аймакчасын ичинде жайгашкан бардык x чекиттериндеги $f(x)$ функциясынын бардык маанилери, A* *чекитин ε – аймакчасын ичинде жайгашса, анда A санын (чекитин) функциянын a чекитиндеги предели деп атап, символикалык түрдө*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (7.3)$$

көрүнүштө жазабыз жана "x өзгөрүлмөсү a санына умтулган кезде $f(x)$ функциясы A пределине ээ болот " $-$ деп окуйбуз. Эгерде мындай $\delta > 0$ саны табылбаса, же такыр жашабаса, анда функциянын a чекитиндеги предели жашабайт же аныктоого мүмкүн эмес дейбиз.

Демек чагылуучу x оргинал-аргументтер a чекитине δ аралыктан алыс эмес жакындап келгенде, алардын элестери болгон $f(x)$ маанилери, A чекитине ε аралыгынан узак эмес жакындыкта болсо, (7.3) орун алат.

R мейкиндигиндеги ченөө эрежеси болгон метриканын тилинде бул аныктаманы

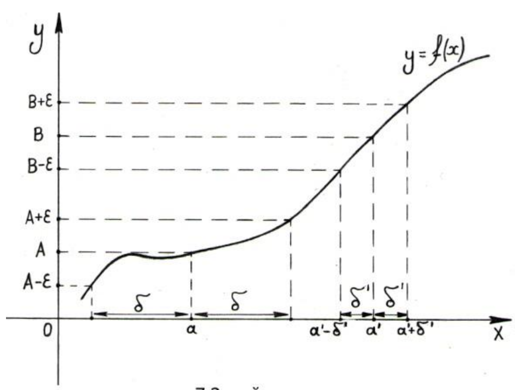
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ \rho(a\,, x) = |x - a| < \delta \Rightarrow \rho(f(x), A) = |f(x) - A| < \varepsilon \quad (*)$$

шартын аткарылышы катарында түшүнүүгө болот.

Ошентип (7.3) аткарылса, $\varepsilon-$ оң саны менен ченелген $y-$ элестерин чеке белине карата, $\delta -$оң саны аныкталгандыктан, $x-$ оргиналдардын чеке белин чени болгон δ саны, алдын ала эркин алынган ε санынан көз каранды болорун байкайбыз $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Умтулуу ылдамдыктарына карата салыштырсак, δ саны аргументтердин a санына жакындашуу ылдамдык – чен бирдигин түшүндүрсө, ал эми ε саны функциялардын маанилеринин A санына жакындашуу ылдамдык – чен бирдигин түшүндүрөт. Жалпы учурда табылган δ оң саны, ε оң саны менен кошо, a чекити (саны) жайгашкан абалдан да көз каранды болот $\delta = \delta(\varepsilon, a)$.

Мисалы жетишерлик кичине ε оң саны бирдей чоңдукта тандалып, $\{f(x)\}$ маанилерин A, B пределдик маанилерине жетүү же жакындашуу ылдамдыктары бир эле $\varepsilon -$ саны менен ченелгенине карабай, $\{x\}$ аргументтерин эки башка $a,\, a'$



7.2-чийме

чекиттерине жетүү же жакындашуу ылдамдыктары ар башка δ , δ' оң сандары менен ченелгенин 7.2 – чиймеде көрсөтөбүз. Мындан, ар дайым эле X аныкталуу областын чекиттериндеги аргументтердин жакындашуу ылдамдык – чендерин (коюуланууусун) бирдей болушунан, функциянын маанилерин да жакындашуу ылдамдык чендерин (коюуланууусун) бирдей болушу (тескериси да) келип чыкпайт деген кортунду чыгарабыз.

- Функциянын чекиттеги пределин, аргументтер a чекитине коюуланган (анын δ - аймакчасына кирген) кезде, функциянын маанилери A чекитине коюланат (анын ε - аймакчасына кирет) деп түшүнүүгө болот. X көптүгүндөгү a чекитинин жайгашуу абалына карап, аргументтер бул чекитке (санга), Ox огу боюнча оң жана сол багыттар менен же эки багыттар боюнча бирдей жакындап келиши же коюуланышы мүмкүн экендигин көрөбүз. Эгерде x аргументтери a чекитине оң жактан гана жакындаса, анда функциянын бул чекиттеги предели оң жактуу, ал эми сол жактан гана жакындаса, анда бул чекиттеги предел сол жактуу деп аталышып, тиешелүү түрдө символикалык

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a+0), \qquad \lim_{x\to a-} f(x) = f(a-0) \qquad (7.4)$$

жазылыштары менен белгиленишет.

Айрым учурларда функциянын a чекитиндеги бир жактуу пределдерин бирөөсү же бири - бирине барабар эмес эки жактуу пределдери жашаганы менен, функциянын бул чекиттеги предели жашабай кала берет. Мындай көрүнүш a чекитине аргументтер бир багыттан коюуланган кезде, функциянын маанилери да A маанисине бир багыттан гана коюулана алары менен түшүндүрүлөт.

Мисалы $y = [x]$ - “x тин бүтүн бөлүгү” функциясын $a = 2$ чекитиндеги пределин карайлы (6.5 – чийме, 6 – гл.).

$$\lim_{x\to 2+} [x] = [2+0] = 2, \qquad \lim_{x\to 2-} [x] = [2-0] = 1 \ \textit{болуп, чынындаэле}$$

x аргументтери $a = 2$ санына оң жактан жакындаган кезде, функциянын маанилери 2 ден чоң бөлчөк сан маанилери аркылуу келишкендиктен, алардын бүтүн бөлүктөрү $[x] = 2$ болуп, оң жактуу предели 2 ге барабар болот. Ал эми сол жактан келгенде 2 ден кичине бөлчөк сандарды аралап келгендиктен, алардын бүтүн бөлүктөрү $[x] = 1$ болуп, сол жактуу предели 1 болору келип чыгат.

Ошентип функциянын a чекитиндеги чектүү А предели жашаса, анда ал бирөө гана болуп, анын оң жана сол жактуу пределдери да А чектүү санына тең болот, б.а. (7.3) жана (7.4) тең болушат

$$\operatorname*{Lim}_{x \to a+} f(x) = f(a+0) = \operatorname*{Lim}_{x \to a-} f(x) = f(a-0) = \lim_{x \to a} f(x) = A. \qquad (7.5)$$

◦ Эгерде x аргументтери a чекитине чексиз жакындаган же умтулган кезде, функциянын $f(x)$ маанилери эбегейсиз чоң деп тандалып алынган Е оң санынан да чоң болсо $f(x) > E$ ($f(x) < -E$) , анда $f(x)$ функциясын a чекитинде $+\infty$ $(-\infty)$ пределдерине ээ болот дейбиз. Бул учурда эбегейсиз чоң Е саны кандай тандалганына карабастан, x аргументтери a чекитине канчалык $\delta -$ аралыкка жакындап келүү керектигин ченемин көрсөтүүчү $\delta > 0$ *саны* табылып, x тер a чекитинин δ – аймакчасына ($|x-a| < \delta$) кирери менен, $f(x) > E$ ($f(x) < -E$) шарттары аткарылат. Аны

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty, \qquad (\lim_{x \to a} f(x) = -\infty) \qquad (7.6)$$

символдору менен жазабыз.

(7.6) орун алса, анда $x = a$ түзү $y = f(x)$ функциясына вертикалдык асимптота болуп эсептелет.

Мисалы, $y = tgx$ функциясын $a = \frac{\pi}{2}$ чекитиндеги оң жактуу жана сол жактуу пределдери тиешелүү түрдө

$$\operatorname*{Lim}_{x \to \frac{\pi}{2}+} tgx = tg\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\infty, \qquad \operatorname*{Lim}_{x \to \frac{\pi}{2}-} tgx = tg\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = +\infty$$

көрүнүштөрдө табылышат (6.39 – чийме, 6 – гл.). Демек, $y = tgx$ функциясын маанилерин эбегейсиз чоң деп тандалган Е оң санына карата алынган "$-E$" ден да кичине (узак аралыкта) болушун камсыз кылуучу, x өзгөрүлмөлөрүн $a = \frac{\pi}{2}$ чекитин оң жагындагы $\delta -$ аймакчасын түзүү, же δ санын табуу мүмкүн ($\delta > 0$, Е> 0). Ошондой эле, эбегейсиз чоң деп тандалган Е санынан да $y = tgx$ функциясын маанилерин чоң болуусун камсыз кылган, x өзгөрүлмөрүн $a = \frac{\pi}{2}$

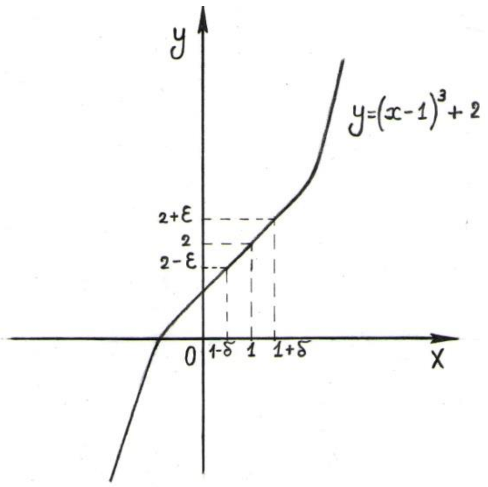
чекитин сол жагындагы $\delta -$ *аймакчасын* ченемин көрсөтүүчү δ саны да табылат (E> 0, $\delta > 0$).

- Эгерде функциянын аныкталуу областын чегинде жайгашкан X = $\{x\}$ аргументтери абсалюттук чоңдугу боюнча эбегейсиз чоң оң жана терс x терди кармап турса, анда функция нөл чекитинен чексиз алыстыкта жайгашкан $+\infty$ *жана* "$-\infty$" чекиттеринде да коюуланып калышы мүмкүн. Мындай абалда деле функциянын тиешелүү маанилери чектүү A санынын чеке белине (аймакчасына) коюулана алат. Бул абалды аралыктардын тилинде түшүндүрөлү:

Алдын ала берилген $\varepsilon > 0$ санын кандай тандаганыбызга карабай, $\rho(f(x), A) = |f(x) - A| < \varepsilon$ шарты, $\{x\}$ аргументтери кандай эбегейсиз чоң Δ санынан да ашып $x > \Delta$ $(x < -\Delta)$ кеткенде гана аткарыларын билүү, же ошондой чекти көрсөтүүчү Δ санын жашашын (табылышын) көрсөтүү керек. Бул пределди

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A\,, \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = A) \qquad (7.7)$$

көрүнүштөрүндө жазабыз.



7.3-чийме

2. Мисалдар

1). $f(x) = (x-1)^3 + 2$ функциясын $a = 1$ чекитиндеги предели

A = 2 саны болорун далилдегиле.

Далилдөө: ► Жетишерлик кичине деп алынган ε санын тандасак, $\rho(f(x), A) = |f(x) - A| = |(x-1)^3 + 2 - 2| =$

$= |(x-1)^3| = |x-1|^3 < \varepsilon$, анда $f(x)$ менен A = 2 санынын арасындагы $\rho(f(x), A) = |f(x) - A|$ аралыгы, $|x-1| < \sqrt[3]{\varepsilon}$ шарты аткарылганда гана ε санынан кичине болорун көрөбүз. Демек табууну талап кылган δ саны деп

$\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon}$ санын алууга болот.

Эгерде $\varepsilon = 0{,}027$ десек, анда $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} = \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$;

$\varepsilon = 0{,}001$ десек, анда $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon} = \sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ болуп, табылган δ саны ε дон көз каранды $\delta = \delta(\varepsilon)$ экендигине ишенебиз. Ошентип $\varepsilon > 0$ санын кандай тандасак да, ага ылайыкташкан $\delta > 0$ саны табылып, x аргументтери $a = 1$ санын $\delta -$аймакчасына кирери менен, $f(x) = (x-1)^3 + 2$ функциясын маанилери A = 2 санынын

$\varepsilon -$аймакчасына киргендиктен, A = 2 санын функциянын $a = 1$ чекитиндеги предели деп айтып (7.3– чийме),

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 1} \{(x-1)^3 + 2\} \quad = 2$$

көрүнүшүндө жазабыз. ◄

2). $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциясын $a = 5$ чекитиндеги предели A = 3 саны болорун далилдегиле.

Далилдөө: ► Алдын ала жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын тандап,

$\rho(f(x), A) = |f(x) - A| = \left|\sqrt{x+4} - 3\right| < \varepsilon$ шартын аткарылышын талап кылалы, анда $\sqrt{x+4} - 3 = \frac{(\sqrt{x+4}-3)\cdot(\sqrt{x+4}+3)}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{x+4-9}{\sqrt{x+4}+3} = \frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}$ өзгөртүп түзүүсүн пайдаланып, ал шартты $\left|\frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right| < \varepsilon$ көрүнүшкө келтиребиз. $f(x) = \sqrt{x+4}$ функциясын X = $\{x : x \geq -4, x \in R\}$ аныкталуу областында, бөлчөктүн бөлүмү $\sqrt{x+4} + 3 > 0$ оң сан болуп, $x = -4$ болгондо, эң кичине $\sqrt{-4+4} + 3 = 3$ маанисине ээ болгондуктан (себеби X көптүгүндө мындан кичине x тер жок), коюлган шарт $\left|\frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right| = \frac{|x-5|}{|\sqrt{x+4}+3|} < \frac{|x-5|}{3} < \varepsilon$ же $|x-5| < 3\varepsilon$ шарты менен тең күчтүү болот. Мындан δ деп $\delta = 3\varepsilon$ санын алууга болорун байкайбыз. Ошентип, $\forall \varepsilon > 0 : \rho(x, 5) = |x - 5| < \delta$ болор замат,

$\rho(f(x), 3) = |f(x) - 3| < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай

$\delta = 3\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ оң саны табылгандыктан,

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x+4} = 3$ *оруналат.*◄

3). $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$ болсо, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ пределине ээ болорун далил –

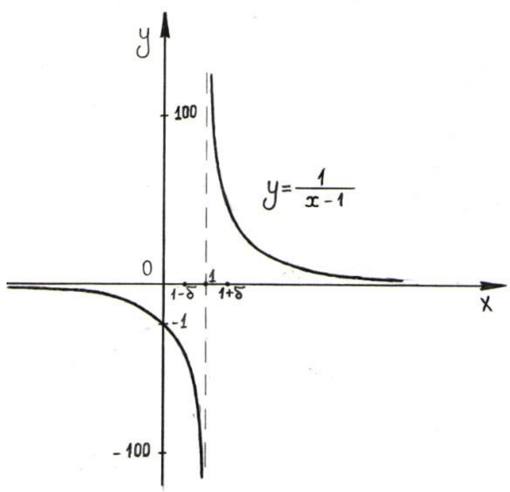
дегиле.

Далилдөө: ► Алдын ала берилген $\varepsilon > 0$ кандай тандаганыбызга карабастан,

$\rho(f(x), A) = \left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{|2x+2-2x-1|}{|2x+1|} = \frac{1}{|2x+1|} < \varepsilon$ шартын аткарылышын талап кылсак, анда $|2x+1| > \frac{1}{\varepsilon}$ барабарсыздыгына ээ болобуз. Мындан ар дайым $|2x+1| > |2x| - 1$ барабарсыздыгы орун алгандыктан, коюлган талап $|2x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, же $|x| > \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$ барабарсыздыгына тең күчтүү экендигин көрөбүз. Демек, тандалган $\varepsilon > 0$ санына ылайыкташкан эбегейсиз чоң $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ саны деп,

$\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\varepsilon})$ санынын бүтүн бөлүгүн $\Delta = \left[\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\varepsilon})\right]$ алууга болот. Ошентип $|x| > \Delta \Rightarrow \rho(f(x), A) = \left|\frac{x+1}{2x+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$, аргументтер чексиз алыстыктагы $\pm\infty$ чекиттерине коюуланган кезде, функциянын маанилери A $= \frac{1}{2}$ чекитине коюуланып, аргументтер $\Delta(\varepsilon)$ санынан ашып кетер замат, функциянын маанилери A $= \frac{1}{2}$ чекитинин $\varepsilon -$ аймакчасынын ичине кирет же

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2} \text{ оруналат.}$$



7.4-чийме

Эгерде $\varepsilon = 0{,}01$болсо

$$\Delta = \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{0{,}01}\right)\right] = \left[\frac{1}{2} \cdot 101\right] = [55{,}5] =$$

$= 55$ келип чыгып, x тер 55 жана -55 сандарынан ашары менен, функциянын маанилери A $= \frac{1}{2}$ санынын $\varepsilon = 0{,}01-$аймакчасын ичине коюланып кирип келишет. Ал эми $\varepsilon = 0{,}001$болсо, $\Delta = \left[\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{0{,}001})\right] = \left[\frac{1}{2} \cdot 1001\right] = [555{,}5] = 555$ болуп, табылган Δ санын ε дон көз каранды экендигин байкайбыз. ◄

4). $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=\infty$ болорун далилдегиле.

Далилдөө: ► Өз алдыбызча эбегейсиз чоң деп ойлогон Е оң санын тандап алып, x аргументтери 1 санынын кандай $\delta-$ аймакчасынын ичине кирген кезде, функциянын маанилери Е санынан да

$|f(x)|>E$ ашып кетерин көрсөтөлү.

$|f(x)|=\frac{1}{|x-1|}>E \Leftrightarrow |x-1|<\frac{1}{E}$ болгондуктан, δ деп $\delta=\frac{1}{E}$ санын алууга болот. Демек алынган Е санына ылайыкталган δ санын таба алдык.

Е = 100 жетишерлик чоң санын алсак, анда $\delta=\frac{1}{E}=\frac{1}{100}=0{,}01$ көрүнүштө табылат.

$|F(x)|>E \Leftrightarrow f(x)>E$ *же* $f(x)<-E$ болгондуктан, x аргументтери 1 санынына $\delta=$ 0,01 аралыгынан жакын жайгашса, же анын 0,01 – аймакчасына кирсе, анда $f(x)=\frac{1}{x-1}>100$ *же*

$f(x)=\frac{1}{x-1}<-100$ болуп, функциянын маанилери жетишерлик чоң деп алынган ±100 санынан да ашып кетет. Е санын кандай тандасак да, ага ылайык (көз каранды) δ саны табылгандыктан,

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$ *болору чын дейбиз* $(7.4-$ *чийме*$)$. ◄◄

5). $a>1$ *болгондо* $\lim_{x\to\infty}a^x=+\infty$ *экендигин далилдегиле.*

Далилдөө: ►Кандай гана эбегейсиз чоң деп эсептелген Е санын алсак да, $\log_a E$ санын бүтүн бөлүгүн Δ саны деп алууга болорун байкайбыз. Чынында эле $|f(x)|>E$ болсун деген талап койсок, анда

$a^x>E \Rightarrow x>\log_a E$ (себеби $a>1$) келип чыгып, ар дайым

$\Delta=[\log_a E]$ саны табылат. Мисалы $a=10,\ E=1000$ десек, анда 1000

санына ылайыкталган $\Delta=[\log_{10}1000]=[3]=3$ саны табылып, x аргументтери 3 санынан ашары менен, функциянын маанилери 1000 санынан ашып кетишет

$x > 3 \ \Rightarrow f(x) = a^x > 1000$. Табылган Δ саны Е санынан көз каранды болот. ◄

7.1.2 Көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги предели

Функциянын предели, оргиналдар менен алардын элестери болгон R сандарынын арасындагы аралыктардын жакындашуу жана алысташуу процесстерин баалоочу математикалык аппарат же каражат болуп эсептелгендиктен, бир өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги пределин, R мейкиндигинде 1.1.6 – аныктамсында (1 – бөлүк) киригизилген ченөө эрежеси (метрика) боюнча аныктадык. ε санын функциянын маанилерин (элестердин) пределдик А маанисине жетүү шкаласы катарында карап, мындай жакындыкка жетүүчүн x аргументтери (оргиналдар) a чекитине канчалык жакындоосу керектигин көрсөтүүчү δ санын таап, a чекитинин δ −аймакчасын түздүк.

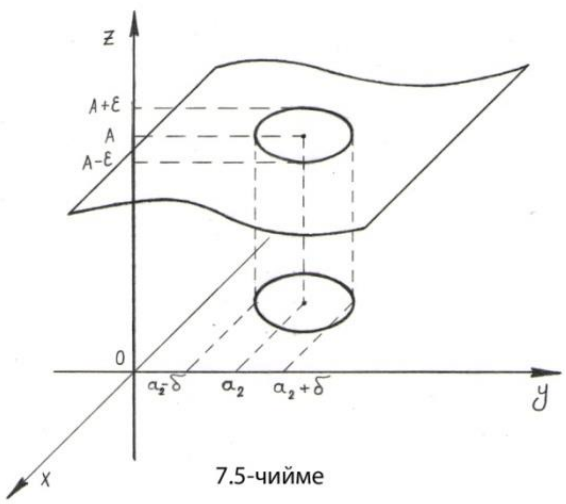
Көп өзгөрүлмөлүү функцияларда деле, ушундай процесс жалпылаштырылып кайталанганы менен, өзгөрүлмөлөр жйгашкан мейкиндиктерге жараша ченөө эрежелери (метрикалар) өзгөрүшөт.

Мисалы R^2 мейкиндигинде жайгашкан D областында аныкталган

$z = f(x, y)$ функциясын $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитиндеги предели, А саны болот дегенди түшүндүрөлү:

Функциянын мааниси $z \in R$ болгондуктан, мурдагыдай эле жетишерлик кичине деп ойлогон ε оң санын эркин тандайбыз жана

$|z - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$ талабын канааттандыруучу D областындагы $M(x\ ; y)$ координаталуу чекиттерин $\delta -$ аймакчасын издейбиз. Мындай аймакча $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитине жетишерлик жакын жайгашат,



7.5-чийме

анткени функциянын ушул чекиттеги пределин каралууда. R^2 мейкиндигиндеги М жана a чекиттериндеги аралыкты же метриканы

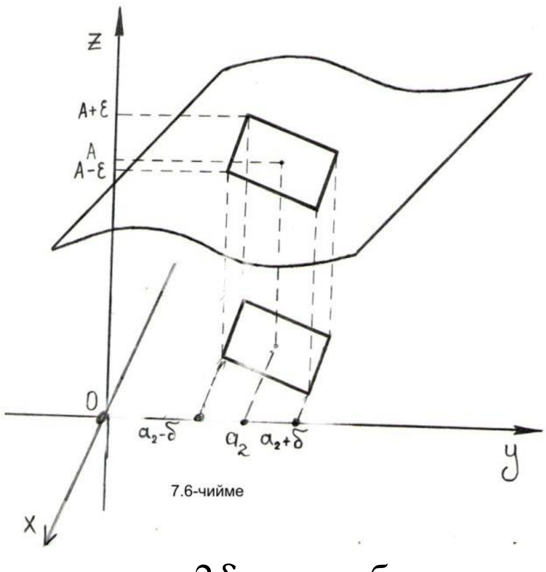
$\rho(M, a) = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}$ көрүнүштө тандасак, анда

табылган δ санына $\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} < \delta$ шарты коюлат. Бул шарт D областындагы борбору $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекити, радиусу $r = \delta$ болгон $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = \delta^2$ тегерегин ички $M(x\,; y)$ координаталуу чекиттеринде гана аткарылат (7.5 – чийме). Ошентип, айтылган тегерек $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитин $\delta -$аймакчасы болуп эсептелет жана $M(x\,; y)$ чекиттери бул аймакчага кирери менен $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ талабы аткарылып, А саны функциянын $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитиндеги предели болот. Функциянын предели болсо, символикалык түрдө кош предел катары

$$\lim_{M \to a} f(M) = \lim_{\substack{x \to a_1 \\ y \to a_2}} f(x, y) = A \qquad (7.8)$$

көрүнүштө жазылат.

Эгерде R^2 мейкиндигинде метриканы



7.6-чийме

$\rho(M, a) = \max\{|x - a_1|, |y - a_2|\} = \delta$ көрүнүштө киргизсек, анда (7.8) пределин жашашын,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0{:}\ |x - a_1| < \delta$ жана

$$|y - a_2| < \delta \ \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

көрүнүштө баяндоого болот. Бул учурда $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитин $\delta -$аймакчасы тегерек болбостон, диогоналдарын кесилишинде a чекити жайгашкан, жактары 2δ саны болгон квадрат болот (7.6 – чийме). Ошентип аргументтер делген $M(x\,; y)$ чекиттери аталган квадраттын ичине кирер замат, функциянын тиешелүү маанилери А чекитине жакындап, анын $\varepsilon -$ аймакчасында жайгашып калат деп түшүнөбүз. Бир өзгөрүлмөлүү функция пределдик мааниге, аргументтердин оң же сол жактардан жакындап келүүсү менен жетсе, эки өзгөрүлмөлүү функция пределдик

А маанисине, аргументтердин тегиздиктеги $\delta-$*тегерекченин* каалаган тарабынан жакындап келүүсү менен жете алат.

∘R^3 мейкиндигиндеги ар кандай $D \subseteq R^3$ областына таандык $M(x\,;y;z)$ чекитинин үч координаталары болгондуктан, D областында аныкталган каалагандай функция $u=f(M)=(fx,y,z)$ үч өзгөрүлмөлүү болуп, D областындагы чекиттерди, бир өлчөмдүү R мейкиндигиндеги u чекиттерине чагылтат. Азыр D областына таандык $a=\{a_1;\ a_2;a_3\}$ чекитиндеги функциянын предели А саны дегенди түшүндүрөлү.

Аралыктар R мейкиндигиндеги метрикага (ченөө эрежесине) ылайык $\rho(f(\mathrm{M}),\mathrm{A})=|f(\mathrm{M})-\mathrm{A}|$, ал эми R^3 мейкиндигиндеги метрика

$\rho(\mathrm{M},a)=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2}$ болгондуктан, алдын ала жетишерлик кичине деп тандалган $\varepsilon>0$ санына карата, $|f(\mathrm{M})-\mathrm{A}|<\varepsilon$ шартын канааттандыруучу $\mathrm{M}(x\,;y;z)$ чекиттерин $a=\{a_1;\ a_2;a_3\}$ чекитине чексиз жакын аралыктагы $\delta-$аймакчасын табуу талап кылынат. Мындай аймакча борбору $a=\{a_1;\ a_2;a_3\}$ чекити, радиусу $r=\delta$ болгон $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=\delta^2$ шарынын ички чекиттери болуп эсептелет.

Ошентип функциянын маанилерин А чекитин $\varepsilon-$аймакчасына жакындап кирүүсүн камсыз кылган, $\mathrm{M}(x\,;y;z)$ аргументтерин a чекитиндеги $\delta-$аймакчасын $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2<\delta^2$ (шарын) түзүү үчүн, жетишерлик кичине δ оң санын таба алсак, анда

$$\lim_{\mathrm{M}\to a} f(\mathrm{M})=\mathrm{A} \text{ дейбиз.}$$

$\{\mathrm{M}\}\to a$ умтулуу процесси тиешелүү координаталардын бири – бирине умтулуусу менен түшүндүрүлгөндүктөн, бул пределди үчтүк предел

$$\lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2\\ z\to a_3}} f(x,y,z)=\mathrm{A} \text{ көрүнүштө жазууга болот.}$$

Эгерде R^3 мейкиндигинде метриканы

$\rho(\mathrm{M},a)=max\{|x-a_1|,|y-a_2|,|z-a_3|\}=\delta$ көрүнүштө тандасак, анда a чекититинин $\delta-$аймакчасы кырларынын узундугу 2δ санына тең болгон, диогоналдарын кесилишинде a чекити турган кубдун ички чекиттерин түзөт. Демек аргументтер аталган кубдун ичине кирери менен, функциянын маанилери А чекитин $\varepsilon -$ аймакчасын ичине кирип келсе гана, функциянын сөз кылган предели жашайт. Аны символикалардын жардамы менен

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0: |x-a_1| < \delta, |y-a_2| < \delta\ , |z-a_3| < \delta \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(x,y,z) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ көрүнүштө жазса болот.

∘R^n мейкиндигиндеги D областында аныкталган $y = \mathrm{f}(x)$ функциясын аргументинде n координаталар $x = \{x_1; x_2;\ x_3;\ \dots; x_n\}$ болгондуктан, n өзгөрүлмөлүү функция

$y = \mathrm{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ көрүнүштө жазылып,

$\forall x, a \in D \subseteq R^n$ чекиттеринин арасындагы аралык

$\rho(x,a) = \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2}$ эрежеси менен эсептелет. Мында $a = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$. Берилген функциянын маанилери $y \in \mathrm{R}$ менен, каалагандай $\mathrm{A} \in R$ сандарын арасындагы аралык $\rho(y, \mathrm{A}) = |\mathrm{f}(x) - \mathrm{A}| = |\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \mathrm{A}|$ эрежеси менен эсептелгендиктен, a чекитиндеги функциянын предели А саны болот дегенди, төмөндөгүдөй түшүндүрөбүз.

$|\mathrm{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай жетишерлик кичине деп эсептелген ε оң санын кандай тандаганыбызга карабай, $x = \{x_1; x_2;\ x_3;\ \dots; x_n\}$ аргументтери менен $a = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекиттеринин арасындагы аралык, $n -$ өлчөмдүү R^n мейкиндигиндеги борбору a чекити, радиусу δ болгон аймакчанын же $\delta -$шарын: $(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + \cdots + (x_n-a_n)^2 < \delta^2$ ичинде жайгаша тургандай $\delta > 0$ санын таба алсак (мында $\delta = max\{|x_i - a_i|\}$, $1 \le i \le n$.), анда А санын $y = \mathrm{f}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ функциясынын $a = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекитиндеги предели деп атап,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ көрүнүштө белгилеп жазабыз.

$x \to a$ умтулуу процесси x, a чекиттеринин тиешелүү координаталарын бири – бирине умтулуусу менен жүргөндүктөн, n өзгөрүлмөлүү функциянын пределин

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ x_3\to a_3\\ \dots\dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \mathrm{A} \tag{7.9}$$

n эселүү предел катарында жаза алабыз.

Ошентип аргументтер борбору $a = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекити, радиусу $r = \delta$ саны болгон n өлчөмдүү шардын ичине кирери менен, функциянын ошол аргументтердеги маанилери А чекитин ε −аймакчасынын ичинде жайгашып калса, анда (7.9) орун алат.

Эгерде R^n мейкиндигиндеги ченөө эрежесин (метриканы)

$\rho(x, a) = max\{|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|, \dots, |x_n - a_n|\} = \delta$ көрүнүштө киргизсек, анда $a = \{a_1; a_2;\ a_3;\ \dots; a_n\}$ чекитин δ −аймакчасы деп, кырларын узундугу 2δ санына тең болгон, диоганалдарын кесилишинде a чекити турган, n өлчөмдүү кубду алабыз. Бул учурда (7.9) орун алышы үчүн, аргументтер куб – аймакчага кирген кезде, функциянын маанилери А чекитинин ε −аймакчасына кирет же

$$|x_1 - a_1| < \delta, |x_2 - a_2| < \delta, \dots, |x_n - a_n| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \mathrm{A}| < \varepsilon$$

аткарылат деп түшүнөбүз. Мында $\delta = max\{|x_i - a_i|\} \quad 1 \le i \le n.$

- Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын пределинде бардык n координаталар боюнча умтулуу бир мезгилде жүрөт деп элестеткенибиз менен, **координаталардагы умтулуу ылдамдыктары ар башка n түрдүү** болушу мүмкүн экендигин эскерте кетебиз. Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын пределин эсептөөдө, айрым бир шарттарды коюу менен, ар бир координаталар боюнча умтулуу кыймылын кезектешип жүргүзүп, **кайталануучу n пределдерди** пайдаланабыз.

Ошондуктан $(n = 2)$ кош (7.8) пределди кандай шарттарда кайталануучу пределдерге алып келүү маселесине токтололу.

7.1 Теорема. *Эгерде 1)* $\lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x, y) = \mathrm{A}$ *кош предели жашаса (А чектүү же чектелбеген сан болушу мүмкүн);*

2) y координатасын бардык маанилеринде x өзгөрүлмөсү боюнча чектүү жөнөкөй $\varphi(y) = \lim_{x \to a_1} f(x,y)$ предели жашаса, анда

$$\lim_{y \to a_2} \varphi(y) = \lim_{y \to a_2} \lim_{x \to a_1} f(x,y) = \mathrm{A}$$

кайталануучу предели жашап, кош пределге барабар

$$\lim_{y \to a_2} \lim_{x \to a_1} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to a_1 \\ y \to a_2}} f(x,y) = \mathrm{A}$$

болот.

Далилдөө: Теореманын шарты боюнча (7.8) кош предели жашагандыктан (А,a_1, a_2 чектүү учурду карайлы),

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: |x - a_1| < \delta \wedge |y - a_2| < \delta \ \Rightarrow |f(x,y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ шарты аткарылат. y өзгөрүлмөсүн $|y - a_2| < \delta$ барабарсыздыгы аткарыла тургандай абалда, убактылуу кыймылсыз (фиксирленген) деп ойлоп, теоремадагы 2) – шартты эске алып,

$$\lim_{x \to a_1} |f(x,y) - \mathrm{A}| = |\varphi(y) - \mathrm{A}| \text{ пределине ээ болобуз.}$$

$x,\ y$ аргументтери $a = \{a_1;\ a_2\}$ чекитин $\delta -$аймакчасында жайгашышкандыктан, теоремадагы кош предел жашасын деген 1) – шарт боюнча функциянын маанилери А чекитин $\varepsilon -$аймагын сыртына чыгып кете албайт же $|f(x,y) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ аткарылып, анын пределдик мааниси да ε санынан $|\varphi(y) - \mathrm{A}| \le \varepsilon$ ашып кетпейт. Мындан y координатасын (өзгөрүлмөсүн) кыймылга келтирип, анын маанилери $|y - a_2| < \delta$ шартына баш ийер замат, $|\varphi(y) - \mathrm{A}| \le \varepsilon$ барабарсыздыгы аткарыларын же функциянын чекиттеги пределин 7.1 – аныктамасы боюнча,

$\lim_{y \to a_2} \varphi(y) = \mathrm{A}$ пределинин жашашына ишенебиз. Андай болсо, теореманын кортундусун туура экендиги далилденген болот:

$$\lim_{y \to a_2} \varphi(y) = \lim_{y \to a_2} \lim_{x \to a_1} f(x,y) = \lim_{\substack{x \to a_1 \\ y \to a_2}} f(x,y) = \mathrm{A}\ . \qquad (7.10)$$

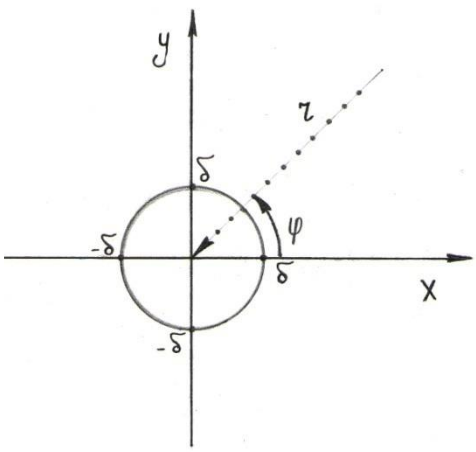
Кайталануучу пределдер менен кош пределдин теӊ болуу шарттарын көрсөткөн теорема боюнча, координаталардын умтулуу кезектерин орундарын алмаштырып коюуга да болот

$$\lim_{x\to a_1}\lim_{y\to a_2} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to a_1\\ y\to a_2}} f(x,y) = \text{A}.$$

Бул теореманы ар бир координата (өзгөрүлмө) боюнча кезектештирип умтулуу принцибин сактоо менен, жалпы nөзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги пределин, n жолу кайталануучу пределдер сыяктуу эсептөөгө болот.

$$\lim_{\substack{x_1\to a_1\\ x_2\to a_2\\ x_3\to a_3\\ \cdots\cdots\\ x_n\to a_n}} f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = \lim_{x_1\to a_1}\lim_{x_2\to a_2}\dots\lim_{x_n\to a_n} f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n) = \text{A} \quad (7.11)$$

◦ Бардык пределдер сыяктуу эле көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги предели жашаса, ал жалгыз гана болот, б.а. аргументтер пределдик чекиттин кайсы тарабынан жакындаса да, функция бир гана А пределине ээ болот. Айрым учурларда көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги предели жашабаганы менен, кайсы бир тандалган багыттар боюнча ар башка жекече пределдери жашай бериши мүмкүн, бирок аларды (7.11) маанисиндеги функциянын предели деп айта албайбыз. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги пределин жашабасын көрсөтүү үчүн, анын кайсы бир багыт боюнча жекече пределдерин биринин жашабашын көрсөтүү жетиштүү.



7.7-чийме

Мисалы $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ фунциясын $\text{O}(0;0)$ чекитинде предели жашабай тургандыгын далилдейли.

Далилдөө:► Берилген эки өзгөрүлмөлүү функциянын x, y өзгөрүлмөлөрү менен аныкталган R^2 тегиздигиндеги (мейкиндигиндеги) чекиттер, О чекитине же анын чексиз кичине аймакчасына түрдүү багыттар менен жакындап келүүсү мүмкүн. Айрым бир багыттар боюнча ар башка жекече пределдери жашаганы менен, жалпы учурда функция бир чекитте жалгыз гана пределге ээ болот деген шарт аткарылбай каларын жогоруда эскерттик. Берилген функцияны полярдык $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ координаталар системасында жазып

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{r^2cos^2\varphi - r^2sin^2\varphi}{r^2cos^2\varphi + r^2sin^2\varphi} = \frac{r^2(cos^2\varphi - sin^2\varphi)}{r^2(cos^2\varphi + sin^2\varphi)}$$
$$= \cos 2\varphi, \qquad (*)$$

аргументтер O(0; 0) чекитине Ox огу менен φ бурчун түзгөн шооланын r чекиттери аркылуу жакындап келсин деп ойлойлу (7.7 – чийме). Анда алдын ала берилген жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына ылайык, $\delta > 0$ саны табылып, r чекиттери 0 санынын $\delta -$аймакчасына киргенде, функциянын $f(x,y)$ маанилери A$\equiv$ $O(0;0)$ чекитинин $\varepsilon -$аймакчасына киреби ?, б.а. $0 < r < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon$ шарты аткарылабы ? – деген суроо туулат.

$(*)$ дан байкалгандай, $f(x,y)$ функциясы r ден көз каранды болбой, φ ден гана көз каранды, ошондуктан φ шооласын бойлоп r нөлгө жакындайбы же жокпу, ал 0 санынын $\delta -$аймакчасына киреби же жокпу, баары бир $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ шартынын аткарылуусуна таасирин тийгизе албайт. Демек, пределдин аныктамасында айтылган $\delta > 0$ санын табуу мүмкүн эмес. Анда O(0; 0) чекитинде функциянын предели жашабайт. Бирок r чекиттери $\varphi = \frac{\pi}{4}$ шооласы боюнча гана 0 чекитине жакындап келсе,

$f(x,y) = \cos\ (2 \cdot \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ болуп, функциянын O(0;0) чекитиндеги жекече предели A = 0 саны болот.◄

Ошентип, аргументтердин пределдик чекиттерге умтулуу багыттарына жараша, ар башка жекече пределдеринин жашашынан функциянын пределин жашашы келип чыкпайт. Аргументтер бардык багыттар боюнча, каалаган жол менен пределдик чекитке жакындаган учурдагы жекече пределдер барабар болушса гана, аларга тең болгон функциянын предели жашайт жана жалгыз гана болот.

7.1.3 Пределдер теориясындагы жалпылыктар

Сан удаалаштыктарын N натуралдык сандарын көптүгүндө аныкталган $x_n = f(n)$ $(n \epsilon \mathrm{N})$ көрүнүштөгү функция деп эсептөөгө болгондуктан, N көптүгүндөгү удаалаштыктын пределин, жалпы X сандык көптүгүндө кеңейтүү менен функциянын пределин аныктоого болот. Ошондуктан функциянын предели да, удаалаштыктын пределине тиешелүү болгон бардык касиеттерге баш ийет, б.а. ошол эле касиеттер эркин алынган X көптүгүндө аныкталган функциялардын пределине ылайыкташтырылып кайталанат. Функциянын предели X көптүгүндө жүрүп жаткан кубулуштардын жакындык деңгээлдерин, Y көптүгүндөгү алардын элестеринин жакындык деңгээлдерине салыштырып баалоо менен үйрөнүүгө мүмкүнчүлүк түзүүчү математикалык аппарат болуп эсептелет.

Чектүү a коюулануу чекитине ээ болгон X көптүгүндө аныкталган $y = \mathrm{f}(x)$ функциясына токтололу.

1^0. Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ чектүү предели жашап, $\mathrm{A} > \mathrm{p}$ $(\mathrm{A} < q)$ экендиги белгилүү болсо, анда a чекитине жетишерлик жакын коңшулаш жайгашкан x аргументтериндеги функциянын $\mathrm{f}(x)$ маанилери да,

$$\mathrm{f}(x) > \mathrm{p} \;\; (\mathrm{f}(x) < q) \qquad (7.12)$$

барабарсыздыктарына баш ийишет.

Далилдөө: ►Эркин тандалуучу жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын $\varepsilon < \mathrm{A} - \mathrm{p}$ $(\varepsilon < q - \mathrm{A})$ боло тургандай шарттарда тандасак,

$$\mathrm{A} - \varepsilon > \mathrm{p} \;\; (\mathrm{A} + \varepsilon < q) \qquad (7.13)$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз. Экинчи жактан функциянын a чекитиндеги чектүү предели жашагандыктан, 7.1 – аныктаманын негизинде тандалган ε го кандайдыр бир жетишерлик кичине $\delta > 0$ саны табылып, a чекитинин $\delta -$ аймакчасындагы $(|x - a| < \delta)$ бардык x чекиттер үчүн, $|f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon$ же $\mathrm{A} - \varepsilon < f(x) < \mathrm{A} + \varepsilon$ шарттары аткарылат. Анда (7.13) – эске алып, (7.12) барабарсыздыктарын туура экендигин далилидеген болобуз.◄

Бул касиет a чектелбеген учурда да аткарыларын, өз алдынча текшерип көрүүгө болот.

2^0. Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ чектүү предели жашап, А оң (терс) сан болсо, анда a чекитинен башка ага жетишерлик жакын жайгашкан x аргументтериндеги функциянын $f(x)$ маанилерин өздөрү да, оң (терс) сандар болушат.

Бул касиет $\mathrm{p} = 0$ $(q = 0)$ учурундагы 1^0 касиеттин кайталанышы болот.

3^0. Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ чектүү предели жашаса, a чекитинен башка ага жетишерлик жакын жайгашкан x аргументтериндеги функциянын $f(x)$ маанилери чектелген болушат, б.а. $|x - a| < \delta$ болгондо

$|f(x)| < \mathrm{M}$ болот $(\mathrm{M} - constanta)$.

Бул касиет $1^0 -$ касиеттен келип чыгат, бирок $|x - a| < \delta$ аймакчасында функциянын аныкталуу областына кирбей калган, x аргументтери жайгашып калган учурларда аткарылбай калышы да мүмкүн. Мисалы $f(x) = \frac{1}{x}$ функциясынын $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}} \frac{1}{x} = 3 = \mathrm{A}$ чектүү предели жашаганы менен, функциянын маанилери $a = \frac{1}{3}$ чекитинин

$\left|x - \frac{1}{3}\right| < \delta = \frac{1}{2}$ аймакчасындагы бардык эле чекиттерде, чектелген боло бербейт, анткени бул аймакчада анын аныкталуу областына кирбеген $x = 0$ чекити жайгашып, аргументтер 0 гө жакындаганда функция чексиз чоңоёт.

X көптүгүндө аныкталышкан x аргументтери бир эле a чекитине умтулушкан бир нече $f(x)$, $\mathrm{g}(x)$, ... сыяктуу функцияларга (санаттык санга чейин болушу мүмкүн), удаалаштыктардын пределдеринде орун алган теңдештиктер, барабарсыздыктар жана арифметикалык амалдар менен байланышкан пределдер, төмөндөгүчө кеңейтилет :

4^0. Эгерде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ жана $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{g}(x) = B$ чектүү пределдерине ээ болушса, анда

1) $\lim\limits_{x\to a}\{f(x) \pm \mathrm{g}(x)\} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\mathrm{g}(x) = \mathrm{A} \pm \mathrm{B}$,

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \cdot \mathrm{g}(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a}\mathrm{g}(x) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$,

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $(\mathrm{B} \neq 0, \mathrm{g}(x) \neq 0)$, (7.14)

4) $\lim\limits_{x\to a}\big(\alpha \cdot f(x)\big) = \alpha \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha \cdot \mathrm{A}$, $(\alpha - conctanta)$

5) $f(x) \leq \mathrm{g}(x) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a}\mathrm{g}(x)$ же $\mathrm{A} \leq \mathrm{B}$

эрежелерин кабыл алабыз. Кабыл алынган (7.14) эрежелери функциянын чекиттеги пределин 7.1 – аныктамасына таянып иштелип чыгылган. Алардын бирөөсүн аткарылышын көрсөтөлү.

Мисалы, 1) – де $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$, $\lim\limits_{x\to a}\mathrm{g}(x) = B$ пределдерин жашашы берилгендиктен,

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \colon |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \mathrm{A}| < \varepsilon \;\wedge\; |\mathrm{g}(x) - \mathrm{B}| < \varepsilon$
орун алат. Экинчи жактан эки функциянын суммасы үчүн,

$\big|\big(f(x) + \mathrm{g}(x)\big) - (\mathrm{A} + \mathrm{B})\big| = |f(x) - \mathrm{A} + \mathrm{g}(x) - \mathrm{B}| \leq |f(x) - \mathrm{A}| +$
$+|\mathrm{g}(x) - \mathrm{B}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \varepsilon_1$ ээ болобуз. Жетишерлик кичине ε оң сандарынын суммасы катарында ε_1 да, жетишерлик кичине сан болот. ε санын тандоо укугу бизде болгондуктан, аны $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ деп алалы. Андай болсо, $f(x) + \mathrm{g}(x)$ функциясын маанилери A + B санын жетишерлик кичине ε_1 – аймакчасына кирери менен, аргументтер a чекитинин $\delta -$аймакчасына киришет, б.а. ушундай аймакчаны түзүүгө мүмкүн болгон δ саны табылат. Бул 7.1 – аныктамасын негизинде

$\lim\limits_{x\to a}\{f(x) + \mathrm{g}(x)\} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ болорун ырастап, 1) – эреженин эки функциянын суммасы үчүн тууралыгын көрсөтөт. Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүп, калган эрежелерди жана a, A, B чектелбеген учурлар үчүн да текшерип көрүүгө болот.

5^0. Эгерде $y = f(x)$ функциясы, X көптүгүндө монотондуу өсүүчү (жок дегенде жай өсүүчү) болсо жана X көптүгүнүн коюулануу чекити болгон a саны, бардык x чекиттеринин эң чоңу болуп, функция жогору жагынан чектелсе, анда $\forall\, x \in \mathrm{X} :\ f(x) \leq \mathrm{M}$, чектүү $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \mathrm{A}$ предели жашайт, ал эми чектелбесе предели $+\infty$ болот. Ошондой эле,

$y = f(x)$ монотондуу кемүүчү функция болуп, a коюулану чекити x тердин эң кичинеси болсо, $f(x)$ төмөн жагынан чектелгенде сөзсүз чектүү предели жашап, чектелбегенде предели $"-\infty"$ болот. Бул касиетти монотондуу удаалаштыктын пределин жалпыланышы катарында эсептөөгө болот.

6^0. $y = f(x)$ функциясын X көптүгүнүн a коюулану чекитинде чектүү пределин жашашы үчүн, каалагандай x жана x'элементтери a чекитин δ −аймакчасына кирери менен, же $|x - a| < \delta \wedge |x' - a| < \delta$ шарттары аткарылар замат, функциянын тиешелүү чекиттердеги маанилери эркин тандалган жетишерлик кичине оң ε санынан да жакын $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ аралыкта жайгашуусун камсыз кыла тургандай δ −аймакчасын түзүлүшү, же ушундай δ санын табылуусу зарыл жана жетиштүү шарт болуп эсептелет.

Бул касиет удаалаштыктардын пределинин жыйналуучулугу жөнүндөгү Больцано – Кошинин зарыл жана жетиштүү шартын, функциянын чекиттеги пределине карата жалпыланышы болот. Мындан $f(x)$ тин a чекитиндеги А предели жашаса, анда a чекитинин δ −аймакчасында бири – бирине чексиз жакын жайгашкан аргументтерге, А чекитинин ε −аймакчасында бири – бирине чексиз жакын жайгашкан функциянын маанилери туура келет деген жыйынтык чыгарабыз.

§7.2. Функциянын пределин эсептөө ыкмалары

7.2.1 Алгебралык ыкмажана сонун пределдер

Функциянын чекиттеги пределин бар экендигин, ал аныкталган жана өзгөргөн көптүктөр кармалган мейкиндиктердеги тиешелүү ченөө эрежелерине (метрикаларга) таянып, жетишерлик кичине ε, δ мерчемдерине (шкаласына) салыштыруу менен, пределдик мааниге жакындашуу процессин көрсөтүп келдик. Бирок дайыма эле аралыктарды ченөө эрежесин колдонуп, функциянын пределдик маанисин табуу же далилдөө, көптөгөн ыңгайсыздыктарды жаратат. Анткени биринчиден, пределдик маани болгон А санын болжолдуу билүү зарыл, антпесе $\rho(f(x), A) = |f(x) - A|$ аралыгын баалай албайбыз.

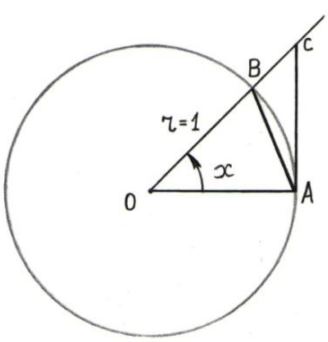
Экинчиден, функциянын маанилерин алдын ала берилген жетишерлик кичине ε мерчемине карап түзүлгөн аймакчага ылайыкталган аргументтердин a чекитиндеги $\delta -$ аймакчасын түзүү, же ушундай δ санын табуу көптөгөн убарагерчиликтерди жаратат. Ошондуктан, функциянын пределин $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ жазылышына карата киргизилген кошуу, кемитүү, көбөйтүү, бөлүү жөнүндөгү (7.14) эреже-касиеттердин жардамы менен, пределди **жаңы алгебралык амал** деп эсептесек болот.

Аналитикалык ыкма менен берилген функциялардын чекиттеги пределдерин 1^0– 6^0 касиеттерин негизинде, бардык алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдү колдонуу менен пределди табуунун **алгебралык ыкмасын** түзөбүз.

Пределдерди алгебралык жол менен эсептөөдө (a чектүү сан) $\frac{a}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{a} = \infty$, $\frac{a}{\infty} = 0$, $a^{\infty} = \infty$ $(a \neq 1)$ деп алынып, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$,

$\infty - \infty$, $1^{\infty}, 0^0$, ∞^0 абалдары аныксыздыктар деп аталышат (1 – бөлүк, 1.1.5). Келип чыккан аныксыздыктарды алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен эсептелүүчү абалга келтирүү, аныксыздыктарды ачуу деп аталат. Мисалы $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$ предели, $\frac{0}{0}$ көрүнүштөгү аныксыздыкты жаратат, бирок аны алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен көбөйтүүчүлөргө ажыратып, аныксыздыкты пайда кылуучу $(x-1)$ көбөйтүүчүлөрүн кыскартып жиберип, пределдин маанисин табабыз

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3.$$



7.8-чийме

Мында $\left(\frac{0}{0}\right) -$ аныксыздыгын пайда кылуучу көбөйтүүчүлөрдү, умтулуу жолунун нөлгө жеткенге чейинки ирмемдеринде теңдеше калып, кыскарып кеткен деп түшүнөбүз.

Функциянын пределдерин эсептөөдө келип чыккан айрым аныксыздыктарды ачууда кеңири колдонулган эрежелерди, “**сонун**

пределдер” деп атап, айрымдарына токтолуп өтөбүз.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ же "1 – сонун предели".

x өзгөрүлмөсү нөлгө умтулган кезде $\sin x$ менен x экөөсү тең нөлгө умтулушкандыктан, берилген предел “ $\frac{0}{0}$ “ көрүнүштөгү аныксыздык болот. Аны ачуу үчүн, бирдик айланадагы борбордук x бурчуна карата

$$\sin x < x < tgx \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \qquad (7.15)$$

түзүлгөн барабарсыздыктын туура экендигин далилдейбиз (7.8 – чийме). Бирдик айланага А чекитинен жүргүзлгөн жаныма менен x бурчуна туура келген OB шооласын кесилишин C чекити деп алып, ΔOAB жана ΔOAC үч бурчтуктарын куралы. Түзүлгөн үч бурчтуктар менен $\overset{\frown}{\mathrm{OAB}}$ секторун аянттарынын арасында $S_{\Delta\mathrm{OAB}} < S_{\overset{\frown}{\mathrm{OAB}}} < S_{\Delta\mathrm{OAC}}$ байланыштары бар экендигин байкайбыз. Аларды аянттардын тиешелүү сандык маанилери менен туюнтуп,

$$\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\sin x < \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\ x < \frac{1}{2}\cdot r^2\cdot tgx\ ,\ (r=1)$$

барабарсыздыктарына ээ болобуз. Аларды $\frac{1}{2}\cdot r^2$ оң санына бөлүп жиберсек, барабарсыздыктардын белгилери өзгөрбөй, (7.15) барабарсыздыгын туура болору келип чыгат.

Радиан менен алынган x өзгөрүлмөсү $0 < x < \frac{\pi}{2}$ аралыгында өзгөрөт деп (же $\sin x\ > 0$) ишенип, (7.15) барабарсыздыгын $\sin x$ оң санына бөлүп жиберип,

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ же $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ барабарсыздыктарына ээ болобуз. Акыркы барабасыздыкты “-1” ге көбөйтүп $-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$, андан кийин баарына 1 ди кошуп,

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < 1-\cos x = 2sin^2\frac{x}{2} \qquad (7.16)$$

көрүнүшүнө келтиребиз. Бирден кичине сандын квадраты катары

$sin^2\frac{x}{2} < \sin\frac{x}{2}$ орун алып, (7.15) барабарсыздыгын биринчи бөлүгү боюнча $2\cdot\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} = x$ келип чыгат. Демек (7.16) барабарсыздыкты

$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ көрүнүштө жазууга болот. Мындан x тин белгисинен көз каранды болбостон $|x| < \frac{\pi}{2}, x \neq 0$ болсо эле, аткарылуучу

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < |x| \qquad (7.17)$$

жалпылаштырылган барабарсыздыкты келтирип чыгарабыз.

Андай болсо, алдын ала жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын кандай тандаганыбызга карабай, x аргументтерин $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$ шартын канааттандыруучу $|x - 0| = |x| < \delta$ аймакчасын түзүү мүмкүн, же ушундай δ саны табылат, Табылган δ саны деп, (7.17) барабарсыздыгын негизинде ε санын өзүн алууга болот $\delta = \varepsilon$. Бул учурда функциянын чекиттеги пределин 7.1– аныктамасы боюнча, чектүү предели

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (7.18)$$

көрүнүштө табылат. Бул пределди, $x \to 0$ умтулганда бөлчөктүн *алымы менен бөлүмү нөлгө умтулуп, бирок умтулуу жолунун бир ирмеминде нөлгө жетпей эле теңделишип, кыскарып кетишкендиктен, 1 саны келип чыгат* деп түшүнөбүз. (7.18) формуласы нөл чекитине чексиз жакын x чекиттеринде $\sin x \approx x$ эквиваленттүү чоңдуктар болорун билдирет.

Табылган (7.18) формуласы ***биринчи сонун предел*** деп аталып, тригонометриялык функциялардын пределдерин эсептөөдө кеңири колдонулат. Мисалы төмөндөгү $"\frac{0}{0}"$ көрүнүштөгү аныксыздыктарды ачып көрсөтөлү:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = 1\cdot\frac{1}{\cos 0} = 1\cdot 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\left|\begin{matrix}\mu=\dfrac{x}{2}\ \text{белгилесек}\\ x\to0\ \Leftrightarrow\ \mu\to0\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{\mu\to0}(\frac{\sin\mu}{\mu})^2=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right\}=\frac{1}{\cos0}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2. Экинчи $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ сонун предели

Экинчи сонун деп аталган предел удаалаштыктар үчүн "1^∞" аныксыздыгын ачууда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ көрүнүштө далилденген эле (1.1.6, 1 – бөлүк). Ошондуктан аны, пределдер теориясындагы жалпылыктарга шилтеме жасап, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ жана $x=\frac{1}{\alpha}$ белгилөөсүн жардамы менен, $x\to\infty\ \Leftrightarrow\ \alpha\to0$ болорун эске алып,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e \qquad (7.19)$$

көрүнүштөрдө жалпылайбыз.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$ сонун предели

Берилген предел, "$\frac{0}{0}$" көрүнүштөгү аныксыздык болот. Аны бардык оң $\mu\in Q$ рационалдык сандары үчүн ачууга болорун көрсөтөлү. Ньютондун биномунун (1.1.2, 1 – бөлүк) жардамы менен $\mu=n$ натуралдык сан болгондо, $(1+x)^n=1+\mu\cdot x+\frac{\mu\cdot(\mu-1)}{1\cdot2}\cdot x^2+\ldots+x^n$ ажыралышына ээ болобуз, аны предел алдындагы туюнтмага коюп эсептесек,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\ n\cdot x\ +\ \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2\ +\ \ldots+\ \ x^n\ -\ 1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n\cdot x\ +\ \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\ \cdot x^2\ +\ \ldots+\ x^n}{x}=$$

$=\lim_{x\to 0}\left(n+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x\ +\ \ldots+\ x^{n-1}\right)=n$ пределине ээ болобуз. Ошентип $\mu=n$ натуралдык сан болгондо,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\ \mu \qquad (7.20)$$

экендиги далилденет.

Экинчи учурда $\mu=\frac{1}{m}$ көрүнүштөгү рационалдык сан болсун дейли ($m\in N$). Анда $(1+x)^{\frac{1}{m}}\ -1=\sqrt[m]{1+x}-1$ туюнтмасын

$y=\sqrt[m]{1+x}-1$ көрүнүштө белгилеп ($x\to 0\ \ \Leftrightarrow\ y\to 0$),

$x=(1+y)^m-1$ туюнтмасына ээ болобуз. Ошентип берилген пределди, ага тең күчтүү болгон предел менен алмаштырып, m натуралдык сан болгон учурда далилденген бөлүккө таянып,

$\lim_{y\to 0}\frac{y}{(1+y)^m-1}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{(1+y)^m-1}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^m-1}{y}}=\frac{1}{m}$ (7.20) сонун пределин орун аларына ишенебиз.

Үчүнчү учурда $\mu=\frac{n}{m}>0$ кыскарбас бөлчөк көрүнүштөгү оң рационалдык сан десек, анда $(1+x)^{\frac{n}{m}}-1=y$ ($x\to 0\ \Leftrightarrow\ y\to 0$) белгилөөсүн жардамы менен $x=(1+y\,)^{\frac{m}{n}}-1$,

$(1+x)^n=(1+y)^m$ теңдештиктерин пайдаланып, берилген пределди

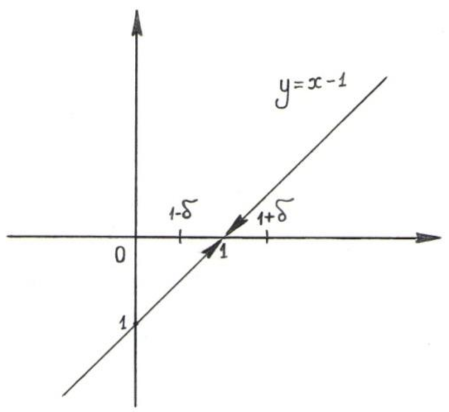
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}}\ -1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n\ -1}{(1+y)^m\ -1}=\frac{\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^n\ -1}{y}}{\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^m\ -1}{y}}=\frac{n}{m}$ көрүнүштө эсептеп, (7.20) формуласын бардык оң μ рационалдык сандар үчүн туура туура экендигин далилдей алабыз.

Эскертүү: *Айрым учурларда* a *чекитиндеги функциянын анык бир* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *предели жашабаганы менен,* a *чекитине жакындап коюуланып келе жаткан айрым бир тандалган* x_n *чекиттериндеги функциянын маанилери, ар кандай* A_n *сыяктуу сандарга жыйнала бериши мүмкүн* ($n\epsilon N$). *Аларды функциянын* a *чекитиндеги жекече пределдери деп айтабыз. Бул жекече пределдердин эң чоңун жогорку предел деп* $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) = max\{\mathrm{A}_n\}$, *ал эми эң кичинесин төмөнкү предел деп* $\underline{\lim\limits_{x\to a}}\, f(x) = min\{\mathrm{A}_n\}$ *көрүнүштөрдө белгилейбиз. Мисалы* $\lim\limits_{x\to 0} sin\frac{1}{x}$ *предели жашабаганы менен, кандай гана* x *болбосун*

$\left|sin\frac{1}{x}\right| \le 1$ *болгондуктан, анын чексиз көп жекече пределдери жашап, алар* $-1 \le \mathrm{A}_n \le +1$ *аралыгында жайгашышып,* $\overline{\lim\limits_{x\to 0}}\, sin\frac{1}{x} = 1$ *жогорку жана* $\underline{\lim\limits_{x\to 0}}\, sin\frac{1}{x} = -1$ *төмөнкү пределдерине ээ болушат. Бул учурда төмөнкү “– 1” жана жогорку “+1” сандарынын арасында жайгашкан ар бир* β *саны, берилген удаалаштыкка жекече предел боло алат. Анткени* x *аргументтерин арасынан тандап куралган* $\{x_n\} \to 0$ *удаалаштыгын түзүп, функциянын ушул удаалаштыктар боюнча маанилерин удаалаштыгы* β *санына умтуларын көрсөтүүгө болот:*

$$sin\frac{1}{x_1}, sin\frac{1}{x_2}, \ sin\frac{1}{x_3}, \ \dots, sin\frac{1}{x_n}, \dots \ \to \ \beta .$$

β *саны эркин тандалгандыктан, ал сыяктуу чексиз көп жекече пределдер* $[-1, +1]$ *сегментин толтуруп турат десек да болот.*



7.9-чийме

Эгерде функциянын a *чекитиндеги предели жашаса, анда ал бирөө гана болуп, анын бардык жекече, жогорку, төмөнкү пределдерине тең болушат*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \overline{\lim_{x\to a}} f(x) = \underline{\lim_{x\to a}}\, f(x) = \mathrm{A}.$$

7.2.2 Чекиттеги чексиз кичине чоңдуктар (функциялар)

7.2 Аныктама. $x = a$ *чекитиндеги* $y = f(x)$ *функциясын предели нөл санына барабар болсо* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, *анда* a *чекитин чексиз кичине чеке белинде (аймакчасында),* $f(x)$ *функциясын чексиз кичине чоңдук (функция) деп айтабыз (Мында* $a = \pm\infty$ чексиз узактагы *коюулануу чекити болушу да мүмкүн).*

Бул аныктама $x, a \in R^n$ болгон учурга да таралат, R^n мейкиндигиндеги чекиттер n координаталуу болушкандыктан,

$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, көп өзгөрүлмөлүү $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясы

$a = \{a_1, a_2, \dots\ a_n\}$ чекитинде чексиз кичине функция (чоңдук) болушу үчүн, анын аргументтеринин ар бирин a чекитин тиешелүү координаталарына умтулгандагы n эселүү предели

$\lim\limits_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ x_3 \to a_3 \\ \dots\dots \\ x_n \to a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ болушу керек. Кайталануучу пределдер менен эсептөө ыкмасына таянып, аны n жолку жөнөкөй пределдер катары кабыл алууга болот. Ошондуктан бир өзгөрүлмөлүү чексиз кичине функцияларга гана кеңири токтолуп, керек учурда аларды көп өзгөрүлмөлүү чексиз кичине функцияларга жалпылоого болот дейбиз.

a чекитинде предели нөлгө барабар болгон көптөгөн функциялар же чексиз кичине чоңдуктар болгондуктан, аларды башка функциялардан айырмалап, $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, ... көрүнүштөрдөгү кичине грек тамгалары менен белгиленген функциялар катарында жазабыз. Ошентип чексиз кичине чоңдук түшүнүгү, a чекитине чексиз жакын аймакчада жайгашкан x чекиттериндеги функциянын маанилерине гана арналып, аймакчанын сыртындагы башка жерлерде жайгашкан x чекиттеринде функциянын маанилери чексиз кичине деп эсептелбейт. Мисалы $y = x - 1$ функциясы $x = a = 1$ чекитинде гана чексиз кичине чоңдук болуп, калган чекиттерде жетишерлик кичине мааниге ээ эмес (7.9 – чийме).

$x = a$ чекитинде көптөгөн чексиз кичине чоңдуктар болгону менен, алар бири - биринен нөлгө жакындоо ылдамдыктары боюнча айырмаланып турушат. $x \to a$ умтулуу процесси бирдей болгонуна карабастан, $\alpha(x) \to 0,\ \beta(x) \to 0,\ \gamma(x) \to 0,$ ... умтулуу процесстери ар кандай болуп, бири 0 санына ылдамыраак келсе, экинчиси жайыраак жетет. Ошондуктан чексиз кичине чоңдуктарды нөлгө умтулуу мүнөздөрү боюнча салыштырып, класстарга бөлөбүз:

I . Эгерде $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = k,\ (k \neq 0)$ нөлдөн айырмалуу чектүү пределине ээ болсо, анда $\alpha(x)$ жана $\beta(x)$ чексиз кичине чоңдуктары, a чекитиндеги бирдей тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар деп аталышат. $k = 1$ болсо, аларды эквиваленттүү чексиз кичине чоңдуктар деп, $\alpha(x) \sim \beta(x)$ көрүнүштө жазабыз. Эгерде жогорудагы $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ предели жашабаса, анда бул эки чоңдукту салыштырууга мүмкүн эмес дейбиз.

II . Эгерде $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ катышын өзү a чекитинде чексиз кичине чоңдук, же $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ болсо, анда $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдугун, $\beta(x)$ чексиз кичине чоңдугуна караганда жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук деп айтып, $\alpha = \mathrm{o}(\beta)$ көрүнүштө белгилейбиз. Аны "о микрон β" деп окуйбуз. Ошол эле мезгилде $\beta(x)$ ти $\alpha(x)$ ке караганда төмөнкү тартиптеги чексиз кичине чоңдук деп эсептөөгө болот.

Эскертүү: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ *эквиваленттүү болушса, анда алардын айырмасы болгон* $\gamma(x) = \alpha(x) - \beta(x)$ *чексиз кичине чоңдугу,* $\alpha(x)$ менен $\beta(x)$ *тердин ар бирине караганда жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар болушат, же* $\gamma = \mathrm{o}(\alpha), \gamma = \mathrm{o}(\beta)$.

Ар бир a чекитиндеги чексиз кичине чоңдуктарды өз ара салыштыруу үчүн, алардын арасынан бир үлгү (эталлон) чексиз кичине чоңдукту тандап алып, аны нөлгө умтулуу бирдик масштабы же шкала катарында пайдаланып, калган чексиз кичине чоңдуктарды ошол үлгү - шкалага салыштырып, тартиптерин аныктайбыз. Тандалган үлгү - шкала чексиз кичине чоңдугу, **негизги чексиз кичине чоңдук** деп аталат.

Мисалы 0 чекитинде **негизги чексиз кичине чоңдук деп** x чексиз кичине чоңдугун, a чекитинде $x - a$ чексиз кичине чоңдугун, ∞ чекитинде $\frac{1}{x}$ чексиз кичине чоңдугун алууга болот.

Ошентип a чекитиндеги чексиз кичине чоңдуктардын нөлгө умтулуу ылдамдыктарын табыятына жараша, негизги кичине чоңдуктарга же алардын ар кандай оң m –даражаларына салыштырган тартиптерди киргизебиз.

III . Айталы $\beta(x)$ кайсы бир чекиттеги **негизги чексиз** кичине чоңдук болуп, $\alpha(x)$ менен $\beta^m(x)$ бирдей тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар болушса, же $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)} = k$ чектүү предели жашаса ($k \neq 0,\ m > 0$), анда $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдугун, $\beta(x)$ негизги чексиз кичине чоңдугуна карата m –тартиптеги жогорку чексиз кичине чоңдук деп айтабыз. Бул учурда $\alpha = o(\beta)$ болот.

3. Мисалдар

1. $a = 0$ чекитинде $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдуктары деп

$\sqrt[m]{1+x} - 1 (m \in N)$, $\sin x$, tgx, функцияларын алсак, алардын баары $\beta(x) = x$ негизги чексиз кичине чоңдуктары менен бирдей тартипте болушат, анткени алардын катыштарынын 0 чекитиндеги пределдери тиешелүү түрдө $\frac{1}{m}$, 1 , 1 нөлдөн айырмалуу чектүү сандары болгонун, жогорудагы (7.20) формуласын экинчи учурунан жана 1 – сонун пределине (7.18) келтирилип чыгарылган мисалдардан билебиз.

2. Ошондой эле $1 - \cos x$ менен x^2 чексиз кичине чоңдуктарын катышы да, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \left(\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0$ болуп, бирдей тартипте экенине жана мындан сырткары 0 чекитине чексиз жакын аралыкта $\sin x \sim x$, $tgx \sim x$ эквиваленттүү болоруна күбө болобуз.

3. Ушул эле $a = 0$ чекитинде $\alpha(x) = x^3$ чексиз кичине чоңдугу, $\beta(x) = \sin x$ чексиз кичине чоңдугуна карата жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук болот, анткени алардын катышынын предели

$\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x^2 \right) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot x^2 \right) = 1 \cdot 0 = 0$ чексиз кичине чоңдук болууда.

4. Ал эми $a = 1$ чекитинде $\alpha(x) = (x^6 - 1)^2$ чексиз кичине чоңдугу, ушул чекиттеги негизги чексиз кичине $\beta(x) = x - 1$ чоңдугуна караганда $m = 2$ тартиптеги чексиз кичине чоңдук деп аталат, анткени

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\left(x^6-1\right)^2}{(x-1)^m} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\cdot\left(x^2+x+1\right)^2\cdot\left(x^3+1\right)^2}{(x-1)^m} = \left|\begin{matrix} m = 2 \\ \text{болсо} \\ \text{гана} \end{matrix}\right| = 36$$

нөлдөн айырмаланган чектүү пределине ээ болот.

5. $y = f(x)$ функциясын графиги менен $y = kx + b$ асимптота түзү жанашып олтуруп, $x \to \infty$ болгондо бири - бирине тийишип, бир эле графикте сүрөттөлүшөт, ошондуктан $x = \infty$ чексиз алыстатылган чекитинде $f(x) \sim kx,\ \ (f(x) - kx) \sim b$ эквиваленттүү чоңдуктар болушат.

IV. Кайсы бир чекитте $\alpha(x)$ чексиз кичине чоңдугу, негизги $\beta(x)$ чексиз кичине чоңдугуна салыштырмалуу m –тартиптеги чексиз кичине чоңдук болсун, б.а.

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)} = k, (k \neq 0,\ m > 0)$ чектүү предели жашасын, анда

$\lim \frac{\alpha(x)}{k\cdot\beta^m(x)} = 1$ болгондуктан, $\alpha(x) \sim k \cdot \beta^m(x)$ эквиваленттүү чексиз кичине чоңдуктар болушуп, $k \cdot \beta^m(x)$ чексиз кичине чоңдугу, $\alpha(x)$ тин **башкы бөлүгү**деп аталат.

Көбүнчө чексиз кичине чоңдуктун башкы бөлүгүн ажыратып,

$$\alpha(x) = k \cdot \beta^m(x) + \mathrm{o}(\alpha) \qquad (7.21)$$

жогорку тартиптеги кичине $\mathrm{o}(\alpha)$ бөлүгүн көрсөтүшүп жазышат. Анткени чексиз кичине чоңдуктар менен иштөөдө, көбүнчө башкы бөлүгүн гана карап, жогорку тартиптеги кичине $\mathrm{o}(\alpha)$ бөлүгүн таштап жиберүүгө болот.

Мисалы $a = 0$ чекитинде $\beta = x$ негизги чексиз кичине чоңдугу менен $\alpha = sin^3 x$ чексиз кичине чоңдугун салыштырып,

$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta^m(x)} = \lim_{x\to a}\frac{sin^3 x}{x^m} = \left|\begin{matrix} m = 3 \\ \text{болгондо} \end{matrix}\right| = 1$ келип чыккандыктан,

$\alpha = sin^3 x$ чексиз кичине чоңдугун, төмөндөгүдөй көрүнүштө

$sin^3x = x^3 + o(sin^3x)$ башкы жана жогорку тартиптеги чекиз кичине бөлүктөргө ажыратып жазабыз. Ошентип 0 чекитине чексиз жакындаганда $sin^3x \approx x^3$ деп алууга болот.

1 - Натыйжа. *Эгерде* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *чектүү предели жашаса, анда* a *чекитин жетишерлик кичине чеке белинде (аймакчасында),* $f(x)$ *функциясы өзүнүн пределдик мааниси болгон А санынан, чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланып турат же*

$$A = f(x) + \alpha(x). \qquad (7.22)$$

2 – Натыйжа. *Чектүү сандагы чексиз кичине чоңдуктардын суммасы, көбөйтүндүсү да чексиз кичине чоңдук болот. Чексиз кичине чоңдукту чектүү санга көбөйтсөк жана бөлсөк, көбөйтүндүсү жана тийиндиси чексиз кичине бойдон калат.*

7.2.3 Чекиттеги чексиз чоң чоңдуктар (функциялар)

7.3 Аныктама. *Эгерде* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *пределине ээ болсо, анда* a *чекитине чексиз жакын аралыкта (аймакчасында) жайгашкан* x *чекиттеринде* $f(x)$ *функциясын чексиз чоң чоңдук деп айтабыз (*a *чекити* $+\infty$, же "$-\infty$" *болушу да мүмкүн).*

Көп өзгөрүлмөлүү функцияларда чексиз чоң функция (чоңдук) түшүнүгү x, a аргументтердин ар бир координаталарына карата өз-өзүнчө чечмеленип, эселүү пределдер менен түшүндүрүлөт. Андан ары, кайталануучу пределдер аркылуу жөнөкөй пределдерге келтирилгендиктен, биз бир өзгөрүлмөлүү чексиз чоң функцияларга гана токтолобуз.

Ошентип, чексиз чоң түшүнүгү a чекитине жетишерлик жакын аймакчанын ичинде жайгашкан x чекиттериндеги функциянын маанилерине гана тиешелүү болуп, аймакчанын сыртында калган x чекиттериндеги функциянын маанилери үчүн жайылтылбайт, б.а. функция чексиз чоң чоңдук болбой калышы да мүмкүн. Мисалы $f(x) = \frac{5}{x-7}$ функциясы

$x = a = 7$ чекитинде гана чексиз чоң чоңдук боло алат.

a чекитинде пределдери $+\infty$ ге барабар болгон көптөгөн функциялар бар болушу мүмкүн болгондуктан, анын чеке белинде көптөгөн чексиз чоң чоңдуктар бар деп түшүнөбүз. a чекитиндеги чексиз чоң чоңдуктарды башка функциялардан айырмалап таануу үчүн, аларды $E(x), G(x), B(x), \dots$ сыяктуу чоң латын тамгалары аркылуу белгиленген функциялар катарында жазабыз. Аргументтер a чекитине белгилүү бир δ масштабы менен ченелген $\rho(x,a) = |x - a| < \delta$ ылдамдыкта жакындаса, чексиз чоң чоңдуктардын ар бири өзүнө гана таандык болгон, ар башка ылдамдыктар менен чексиз чоңоюп олтурушат, ошондуктан аларды чексиз чоңоюу ылдамдыктары боюнча класстарга бөлүп, бири - бири менен салыштырабыз.

I . a чекитиндеги эки $E(x), G(x)$ чексиз чоң чоңдуктарын катышы

$\lim\limits_{x\to a}\frac{E(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{G(x)}{E(x)} = k\ , k\ \neq 0$ чектүү пределине ээ болсо, анда аларды бирдей тартиптеги чексиз чоң чоңдуктар дейбиз. $k = 1$ болсо, $E(x) \sim G(x)$ эквиваленттүү чексиз чоң чоңдуктар болушат.

II . a чекитинде $\frac{E(x)}{G(x)}$ катышын өзү чексиз чоң чоңдук болсо

$\lim\limits_{x\to a}\frac{E(x)}{G(x)} = \infty$, анда $E(x)$ чексиз чоң чоңдугу, $G(x)$ чексиз чоң чоңдугуна караганда жогорку тартиптеги чексиз чоң чоңдук деп, же $G(x)$ ти $E(x)$ ке караганда төмөнкү тартиптеги чексиз чоң чоңдук деп атайбыз. Бул учурда анын тескери $\frac{G(x)}{E(x)}$ катышы a чекитинде чексиз кичине $\lim\limits_{x\to a}\frac{G(x)}{E(x)} = 0$ чоңдук болот.

Эгерде $\lim\limits_{x\to a}\frac{E(x)}{G(x)}$ предели жашабаса, анда бул a чекитинде берилген чексиз чоң чоңдуктарды салыштырууга мүмкүн эмес дейбиз.

Чекиттеги чексиз чоң чоңдуктардын ичинен бирөөсүн тандап алып, аны ***негизги чексиз чоң чоңдук*** деп атап, калгандары менен салыштырууда үлгү - эталлон катары пайдаланабыз. Мисалы a (чектүү) чекитинде негизги чексиз чоң чоңдук деп $\frac{1}{|x-a|}$ чоңдугун, $a = \pm\infty$ чекитинде $|x|$ чоңдугун алууга болот.

III. Айталы $G(x)$кайсы бир чекиттеги негизги чексиз чоң чоңдук болсун, анда $\lim\frac{E(x)}{G^m(x)} = k,\ k \neq 0$ чектүү предели жашаса, анда $E(x)$ чексиз чоң чоңдугун, $G(x)$ негизги чоң чоңдугуна салыштырмалуу m –тартиптеги жогорку чексиз чоң чоңдук деп айтабыз. $k = 1$ болсо, $E(x) \sim G^m(x)$ эквиваленттүү болушуп, $G^m(x)$ чексиз чоң чоңдугу, $E(x)$ тин башкы бөлүгү деп аталат.

Мисалы $E(x) = 5x^4 - 1$ жана $G(x) = 9x + 2x^3 + 3x^4$ функциялары $a = +\infty$ чекитинде бирдей тартиптеги чексиз чоң чоңдуктар болушат, анткени

$$\lim_{x\to a}\frac{E(x)}{G(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-1}{9x+2x^3+3x^4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\cdot(5-\frac{1}{x})}{x^4\cdot(\frac{9}{x^3}+\frac{2}{x}+3)} = \frac{5-\frac{1}{\infty}}{\frac{9}{\infty}+\frac{2}{\infty}+3} = \frac{5-0}{0+0+3} = \frac{5}{3}$$

нөлдөн айырмалуу чектүү пределине ээ болот.

$a = 3$ чекитиндеги $\frac{7}{(x-3)^8}$ чексиз чоң чоңдугу, $\frac{1}{x-3}$ негизги чоңдугуна караганда $m = 8$ – тартиптеги чексиз чоң чоңдук болот анткени,

$\lim\limits_{x\to3}\frac{\frac{7}{(x-3)^8}}{(\frac{1}{x-3})^m} = \left|\begin{matrix} m=8 \\ \text{болгондо}\end{matrix}\right| = 7$ нөлдөн айырмалуу чектүү предели жашайт.

IV. Эгерде $x = a$ чекитинде $f(x)$ чексиз чоң чоңдук болсо, анда ушул чекитте $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)}$ чексиз кичине чоңдук болот. Ошондой эле тескерисинче $\frac{1}{\alpha(x)}$ чексиз чоң чоңдук болот.

1– Натыйжа. *Чектүү сандагы чексиз чоң чоңдуктардын суммасы, көбөйтүндүсү да чексиз чоң чоңдук болот. Чексиз чоң чоңдукту чектүү санга көбөйтсөк жана бөлсөк, анда көбөйтүндүсү жана тийиндиси чексиз чоң бойдон калат.*

Пределди табуу ыкмаларына мисалдар

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{0^2-1}{2\cdot0-0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$;

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ пределинде $x=1$ деп эсептесек, "$\frac{0}{0}$" көрүнүштөгү аныксыздык келип чыгат. Предел алдындагы бөлчөктүн алымы менен бөлүмүндө $(x-1)$ жөнөкөй көбөйтүүчүсү бар экендигинен, алардын нөлгө айланып жаткандыгын байкайбыз. Аныксыздыкты ачуу үчүн анын алымы менен бөлүмүнөн ушул көбөйтүүчүлөрдү ажыратып алып, кыскартууга аракеттенебиз.

Алымын $x^2-1=(x-1)\cdot(x+1)$, бөлүмүн

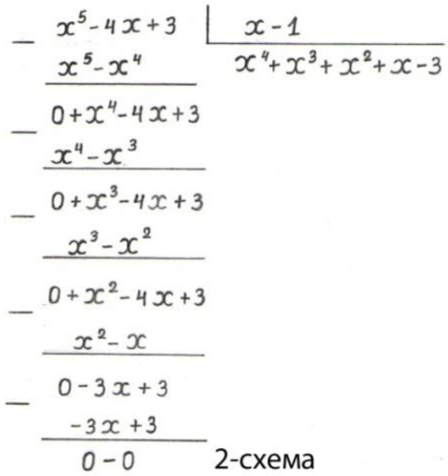
$2x^2-x-1 \;==(x-1)\cdot(2x+1)$ көрүнүштөрдө жазсак, анда

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(2x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}$ пределине ээ болобуз.

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ предели "$\frac{\infty}{\infty}$" көрүнүштөгү аныксыздык болот. Анткени бөлчөктүн алымы менен бөлүмүндө, $a=\infty$ чекитиндеги x^2 чексиз чоң чоңдугу бар. Аныксыздыкты ачуу үчүн, аларды ажыратып алып, кыскартууга аракеттенсек: и

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{2-\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1-0}{2-0-0}=\frac{1}{2}$ чектүү пределин эсептеп чыгарабыз. Демек, предел алдындагы бир эле

$f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ функциясы $a=0,\ a=1, a=\infty$ үч башка чекиттерде, үч башка пределдик маанилерге ээ болду.



2-схема

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)\cdot(1+2x)\cdot(1+3x)-1}{x}$ предели "$\frac{0}{0}$" аныксыздыгы болот. Анын аныксыздык болуп жатканын себеби, алымында жана бөлүмүндө жөнөкөй x көбөйтүүчүсүн кармалып турганы менен түшүндүрүлөт. Алымындагы кашааларды ачып чыгып,

$$(1+x)\cdot(1+2x)\cdot(1+3x)-1=6x^3+11x^2+6x+1-1=$$

$=6x^3+11x^2+6x$ ээ болбуз. Ордуна коюп, берилген пределди $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot(6x^2+11x+6)}{x}=$

$= \lim\limits_{x\to 0}(6x^2 + 11x + 6) = 6$ көрүнүштө

эсептейбиз.

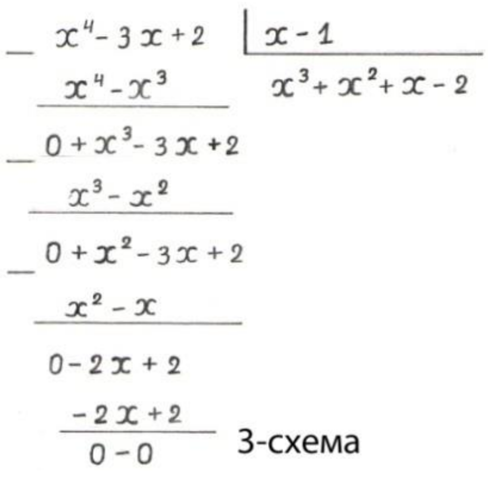
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ предели "$\frac{\infty}{\infty}$" аныксыздыгы болуп, алымы менен бөлүмүндө ∞ ди пайда кылып жаткан x чексиз чоңдугугун эң чоң даражасы 50 болгон,x^{50} көрүнүштөгү көбөйтүүчүлөр бар, аларды кыскартып,

$$\operatorname{Lim}_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{20}\cdot\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\cdot x^{30}\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^{20}\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)} = \frac{(2-0)(3+0)}{2+0} = 3$$ээ болобуз.

6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ предели "$\frac{0}{0}$" аныксыздыгы болот, анын алымы менен бөлүмүнөн аныксыздыкты пайда кылган $(x-1)$ көбитүүчүлөрүн ажыратып алып, кыскартабыз. Бөлүмүн

$(x^5-4x+3):(x-1) = x^4+x^3+x^2+x-3$ (2 – схема), алымын $(x^4-3x+2):(x-1) = x^3+x^2+x-2$ (3 – схема) бөлүүнүн натыйжаларын пайдаланып, берилген пределди



3-схема

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x-3)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^3+x^2+x-2)}{(x^4+x^3+x^2+x-3)} = 1$$ эсептей алабыз.

7) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x+4} = 3$ болорун R мейкиндиктеги аралыктардын тилинде далилдегиле.

Далилдөө: ►Алдын ала берилген жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына ылайыкташкан $\delta > 0$ саны табылып,

$|x-5|<\delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x+4}-\ 3\right|<\varepsilon$ болсо, анда 7.1 – аныктамасы боюнча A = 3 саны, $a=5$ чекитиндеги функциянын предели болорун далилдеген болобуз.

Чынында эле $f(x)$ $=\sqrt{x+4}$ функциясын аныкталуу $(x\geq -4)$ областын чегиндеги бардык x тер үчүн, $\left|\sqrt{x+4}+\ 3\right|>3$ барабарсыздыгы аткарылгандыктан,

$$|\mathrm{f}(x)-\mathrm{A}|=\left|\sqrt{x+4}-\ 3\right|=\frac{\left|\sqrt{x+4}+\ 3\right|\cdot\left|\sqrt{x+4}-\ 3\right|}{\left|\sqrt{x+4}+\ 3\right|}=$$

$=\frac{\left|\left(\sqrt{x+4}\right)^2-9\right|}{\left|\sqrt{x+4}+3\right|}<\frac{|x-5|}{3}<\varepsilon$ талабы, $|x-5|<3\varepsilon$ болгондо аткарыларын көрөбүз. Демек изделүүчү δ саны деп, $\delta=3\varepsilon$ санын алсак эле, 6.8 – аныктаманын шарты аткарылып, $a=5$ чекитиндеги функциянын предели A = 3 саны болору далилденген болот.◄

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-1}}$ пределинде, бөлчөктүн алымы менен бөлүмүн ∞ ге айлантып жаткан $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ көбөйтүүчүсү экендигин байкайбыз. Предел алдындагы бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ ге бөлүп жиберсек, аныксыздык ачылып,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ +\ 3x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\ +\ 5x^{\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}\ +\ \sqrt[3]{2x^{1-\frac{3}{2}}-\ x^{-\frac{3}{2}}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ +\ \frac{3}{\sqrt[6]{x}}\ +\ \frac{5}{\sqrt[10]{x^3}}}{\sqrt{3-\frac{2}{x}}\ +\ \sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x^3}}}}=$$

$=\frac{2+0+0}{\sqrt{3-0}+\sqrt[3]{0-0}}=\frac{2}{3}$ предели табылат.

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{tg5x}$ пределин тапкыла.

Чыгаруу:► Тригонометриялык функциялар үчүн биринчи сонун пределин пайдалансак, анда мындай "$\frac{0}{0}$" аныксыздыгын ачуу үчүн, берилген пределди

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{tg5x}{5x}\cdot 5} = \frac{\lim\limits_{3x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\lim\limits_{5x\to 0}\frac{tg5x}{5x}\cdot 5} = \frac{3}{5}$ көрүнүштө эсептөөгө болот.◄

10) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ предели $0\cdot\infty$ көрүнүштөгү аныксыздык болуп, аны ачуу үчүн $y = 1 - x$ белгилөөсүн киргизебиз.

$x \to 1 \Leftrightarrow y \to 0$ болгондуктан, берилген пределди

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2} = \lim_{y\to 0}\left\{y\cdot tg\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-y)\right]\right\} = \lim_{y\to 0}\left\{y\cdot ctg\frac{\pi y}{2}\right\} =$$

$= \lim\limits_{y\to 0}\frac{y\cdot\cos\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0}\cos\frac{\pi y}{2}}{\lim\limits_{\frac{\pi y}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\pi y}{2}}{\frac{\pi y}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$ көрүнүштө эсептейбиз.

11) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+4}$ пределин эсептөөдө 1^{∞} аныксыздыгын ачуучу экинчи сонун пределин пайдаланабыз.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+4} = \lim_{x\to -\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4}\right\} = \lim_{x\to -\infty}\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^{3}\cdot$$

$\cdot\lim\limits_{x\to -\infty}(1+\frac{3}{x})^{4} = e^{3}\cdot 1^{4} = e^{3}.$

12) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x}$ пределин да, экинчи сонун пределди колдонуп эсептейбиз.

$\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(3x)^{2x}\cdot(1+\frac{1}{3x})^{2x}}{(3x)^{2x}\cdot(1-\frac{2}{3x})^{2x}} = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{(1+\frac{1}{3x})^{2x}}{(1-\frac{2}{3x})^{2x}} =$

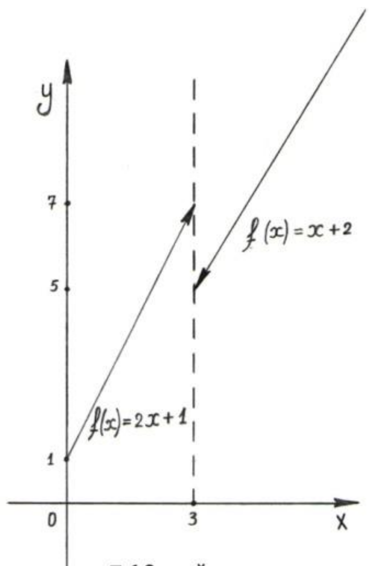
$\frac{\lim\limits_{x\to -\infty}\left\{(1+\frac{1}{3x})^{3x}\right\}^{\frac{2}{3}}}{\lim\limits_{x\to -\infty}\left\{(1+\frac{1}{-\frac{3}{2}\cdot x})^{-\frac{3}{2}\cdot x}\right\}^{-\frac{4}{3}}} == \frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{-\frac{4}{3}}} = e^{2}.$

13) $\mathrm{f}(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}$ $(a_0\neq 0, b_0\neq 0)$ бөлчөк – рационалдык функциясын $x\to\infty$ умтулгандагы пределин, x тердин даражалары m, n сандарына жараша табабыз

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ \ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\ \ldots+\ b_{n-1}x+\ b_n}$$
$$=\begin{cases}\infty, & m>n \text{ болсо,}\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m=n \text{ болсо,}\\ 0, & m<n \text{ болсо.}\end{cases}$$

Себеби бөлчөктүн алымынан жана бөлүмүнөн "$\frac{\infty}{\infty}$" аныксыздыгын пайда кылуучу, x тин эң чоң даражаларын бөлүп алып, кыскартуу керек.

14) $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin5x+tg^2x+\ln(1+x^2)}{x+x^2+arcsin^2x}$ предели "$\frac{0}{0}$" көрүнүштөгү аныксыздык болот. Анткени бөлчөктүн алымында жана бөлүмүндө $x=0$ чекитиндеги чексиз кичине чоңдуктардын суммасы орун алган. Алымындагы tg^2x , $\ln(1+x^2)$ чексиз кичине чоңдуктары, $sin5x$ чексиз кичине чоңдугуна салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдуктар болушуп, андан ылдам нөлгө жетишет. Бөлүмүндөгү x^2, $arcsin^2x$ чексиз кичине чоңдуктары да, x ке салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичинелер болушуп, нөлгө мурда келишет. Иш жүзүндө аныксыздыкты нөлгө жайыраак умтулуп келишкен $sin5x$ жана x чексиз кичине чоңдуктары жаратышат. Чексиз кичине чоңдуктардын суммасы да чексиз кичине болгондуктан, алардын башкы бөлүктөрүн алып, жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүктөрүн таштап жиберсек, $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin5x+tg^2x+\ln(1+x^2)}{x+x^2+arcsin^2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{sin5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{sin5x}{5x}\cdot5=5$ пределине ээ болобуз.



7.10-чийме

15) $\mathfrak{f}(x) = \begin{cases} x+2\text{, эгерде } 3 < x \le 8, \\ 2x+1\text{, эгерде } 0 \le x \le 3 \end{cases}$ функциясын $x = 3$ чекитиндеги оң жана сол жактуу пределдерин тапкыла.

Чыгаруу:► $x = 3$ санына сол жактан жеткенге чейин $\mathfrak{f}(x) = 2x + 1$ көрүнүштөгү функция болгондуктан,

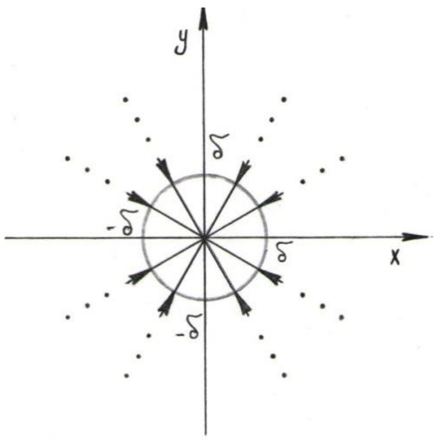
$\lim\limits_{x\to 3-} \mathfrak{f}(x) = \lim\limits_{x\to 3-} (2x+1) = 7 = \mathfrak{f}(3-0)$ сол жактуу пределине ээ болот. Ал эми оң жактан жакындап келген учурда, x аргументи 3 санынын накта өзүнө жете албаса да, анын оң жактагы кошунасына чейин бара алмак, бирок чыныгы сандар кошунасын көрсөтө албай турган деңгээлге чейин тыгыз жайгашкандыктан, 3 санын кошунасынан айырмалоо, чексиз жакындоочу пределдик абалдарда гана такталат. Демек x аргументтери 3 санына оң жактан пределдик абалда жакындаганга чейинки тактыкта, $\mathfrak{f}(x) = x + 2$ көрүнүштөгү функция бойдон кала берет. Андай болсо,

$\lim\limits_{x\to 3+} \mathfrak{f}(x) = \lim\limits_{x\to 3+} (x+2) = 5 = \mathfrak{f}(3+0)$ оң жактуу пределин табабыз.

Берилген функциянын $x = 3$ чекитинде предели жашабаганы менен, оң жактуу жана сол жактуу бири – биринен айырмалуу

$\mathfrak{f}(3-0) = 7 \ne \mathfrak{f}(3+0) = 5$ пределдери жашайт (7.10 – чийме).◄

16) $\mathfrak{f}(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x} \text{ эгерде } 0 < x < +\infty \text{ болсо,} \\ x\cdot\cos\frac{1}{x} \text{ эгерде } -\infty < x < 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясын $x = 0$ чекитинде сол жактуу предели жашап, оң жактуу предели жашабашын далилдегиле.



7.11-чийме

Далилдөө:► $x = 0$ чекитине сол жактан пределдик абалда жакындаганга чейин $\mathfrak{f}(x) = x\cdot\cos\frac{1}{x}$ көрүнүштө сакталып бара берет. Бул чекитте биринчи x көбөйтүүчүсү чексиз кичине чоңдук, экинчиси $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \le 1$ чектелген чоңдук болгондуктан, алардын көбөйтүндүсү чексиз кичине чоңдук болуп,

$\lim\limits_{x\to 0-} \mathfrak{f}(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \left(x \cdot \cos\frac{1}{x}\right) = 0$ сол жактуу предели жашайт.

$x = 0$ чекитине оң жактан жакындап көрөлү. Бул учурда

$\mathfrak{f}(x) = \cos\frac{1}{x}$ көрүнүштө сакталып келет. Жакындоону нөл санына эки түрдүү секирик мүнөздө оң жактан жакындоочу $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, жана

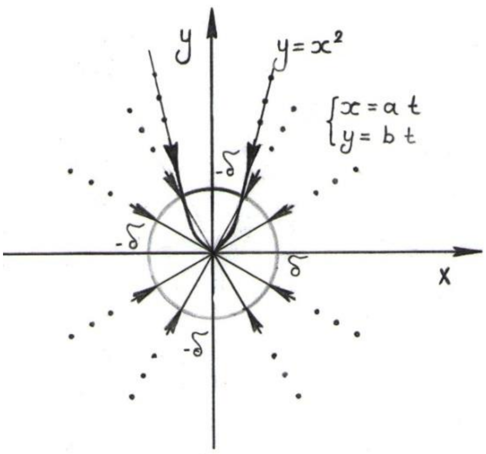
$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ удаалаштыктары боюнча жүрсүн дейли. Анда $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ чекиттери менен нөлгө жөнөгөндө, функциянын маанилери $\mathfrak{f}(x_n) = \cos\frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \cos 2\pi n = 1$ болуп, оң жактуу предели

$\lim\limits_{x\to 0+} \mathfrak{f}(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \cos 2\pi n = 1$ санына барабар болот. Ал эми оң жактан

$x_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$ чекиттери менен нөлгө жөнөсөк, функциянын маанилери

$\mathfrak{f}(x_n) = \cos\frac{1}{\frac{2}{\pi(4n+1)}} = \cos\frac{\pi(4n+1)}{2} = 0$ болуп, x_n чекиттери менен жакындаган оң жактуу предел $\lim\limits_{x\to 0+} \mathfrak{f}(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \cos\frac{\pi(4n+1)}{2} = 0$ келип чыгат. Демек $x = 0$ чекитине оң жактан туташ x чекиттери менен жакындаганда, функциянын маанилери ар башка пределдерге умтула берип, анык бир оң жактуу предели жашабайт деген тыянакка келебиз.◄

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2\cdot y}{x^2+y^2}$ пределин эсептегиле.



7.12-чийме

Чыгаруу:►Берилген пределди аргументтердин $\{x, y\} \to \{0,0\}$ умтулуусу, Ox огу менен φ бурчун түзгөн O чекитинен өтүүчү шоолаларда жайгашкан r чекиттери боюнча (7.11 – чийме) жүрсүн дейли ($0\leq \varphi \leq 2\pi$). Анда $\begin{cases} x = r\cdot\cos\varphi, \\ y = r\cdot sin\varphi \end{cases}$ полярдык координаталар системасына өтүү менен, предел алдындагы функцияны

$\frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} = \frac{r^3 \cos^2\varphi \cdot sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + sin^2(\varphi)} = r\cos^2\varphi \cdot sin\varphi$ көрүнүшүнө келтиребиз. φ бурчу кандай болушунан көз каранды болбостон ($\forall\varphi\epsilon[0,\ 2\pi]$), О чекитинен чачырап чыккан чексиз көп шоолалардагы r чекиттери аркылуу нөл чекитине умтулуп,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0}(r\cos^2\varphi \cdot sin\varphi) = 0$ пределине ээ болобуз. ◄

Эскертүү: Жалпы учурда $(a; b)$ чекитинен чыгуучу шоолалар чексиз көп жана жыш жайгашкандай көрүнгөнү менен, $(a; b)$ чекитине келүүчү бардык багыттардагы жолдорду толук камтый алат деп ишенип, $(x; y)$ аргументтери ушул шоолалардагы жол менен $(a; b)$ чекитине умтулган кездеги функциянын предели А саны болсо эле, бул чекиттеги кош предел жашап, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x, y) = \mathrm{A}$ санына барабар болот деген кортунду чыгарууга боло бербейт, анткени мындай чексиз көп шоолалардан башка $(a; b)$ чекитине келүүчү чексиз сандагы ийрилерди бойлогон жолдор да бар. Ошентсе да кайсы бир деңгээлдеги каталык менен, $(a; b)$ чекитине келүүчү бардык багыттагы жолдорду элестетүүчү чексиз көп шоолалар боюнча умтулууну колдонуп, каталыктарга жол коюу менен көп өзгөрүлмөлүү функциялардын пределдерин эсептөөгө болот.

18) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \cdot y}{x^4+y^2}, \text{ эгерде } (x; y) \neq (0; 0) \text{болсо}, \\ 0, \quad \text{эгерде } (x; y) = (0; 0) \text{болсо} \end{cases}$ функциясын O(0;0)чекитиндеги предели жашайбы?

Чыгаруу:► Айталы $(x; y)$ координаталуу чекиттери O(0;0) чекитине

$x = at,\ y = bt\ (a \neq 0\ V\ b \neq 0)$ параметрдик теңдемеси менен берилген каалагандай түздөрдү бойлоп жакындасын, анда a жана b кандай сандар болгонуна карабастан,

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \mathrm{f}(x, y) = \lim\limits_{t\to 0} \mathrm{f}(at, bt) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{a^2bt}{a^4t + b^2} =$$

$= \frac{0}{b^2} = 0$ келип чыгат. Эгерде $b = 0$ десек $(a \neq 0)$, анда $y = 0$ менен кошо $f(x, y) = 0$ болуп, $y = 0$ түзүн (Оx огун) бойлоп O(0;0) чекитине жакындаганда да, функция 0 пределине ээ болот. Ошондой эле аргументтер Оy огу боюнча ($x = 0$ түзү, $a = 0, b \neq 0$ учуру) жакындаганда да, функциянын предели 0 болорун көрөбүз. Ошентип $(x; y)$ чекиттери, O(0;0) чекити аркылуу өтүүчү бардык чексиз көп түздөрдү бойлоп O(0;0) чекитине жакындаганда, функция 0 пределине ээ болот.

Экинчи жактан, $(x; y)$ чекиттери O(0;0) чекитине $y = x^2$ парболасынын чекиттери менен жакындасын десек (7.12– чийме), анын параметрдик теңдемеси $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = t \end{cases}$ $(t > 0)$ болгондуктан, предели $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{t \to 0} f(\sqrt{t}, t) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$ санына барабар болот. Демек берилген функция O(0;0) чекити аркылуу өтүүчү түздөр боюнча келгенде 0 жекече пределине, ал эми O(0;0) чекити аркылуу өтүүчү $y = x^2$ параболасы менен жакындаганда $\frac{1}{2}$ жекече пределине ээ болуп, жалпы учурда анын кош предели жашабайт.◄

19) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2}$ пределин эсептегиле.

Чыгаруу:► Предел алдындагы функцияны өзгөртүп түзөлү

$f(x, y) = \frac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} = 2 + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}$. Эбегейсиз чоң Е саны табылсын деп ойлойлу, анда $|x| > \mathrm{E}$, $|y| > \mathrm{E}$ болсо же аргументтер Е санынан ашып кетишсе, анда

$\left|\frac{x}{x^2 + y^2}\right| < \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{\mathrm{E}}$ орун алат, себеби эбегейсиз чоң y^2 санын таштап жиберсек, бөлчөктүн бөлүмү кичинергендиктен, бөлчөктүн өзү чоңоёт. Кийинки кадамда бөлүмүндөгү $|x|$ ти андан кичине Е саны менен алмаштырып, бөлчөктү чоңойттук. Ошондой эле $\left|\frac{y}{x^2 + y^2}\right| < \left|\frac{1}{y}\right| < \frac{1}{\mathrm{E}}$ келип чыгат. Андай болсо, чын эле $|x| > \mathrm{E} \wedge |y| > \mathrm{E} \Rightarrow |f(x, y) - \mathrm{A}| =$

$= \left|\frac{x + y + 2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2} - 2\right| = \left|2 + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} - 2\right| = \left|\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2}\right| \leq \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\right| +$

$+\left|\frac{y}{x^2+y^2}\right| < \frac{1}{E}+\frac{1}{E}=\frac{2}{E}<\varepsilon$ шарты аткарыла тургандай, биз ойлогон $E=\frac{2}{\varepsilon}$ эбегейсиз чоң саны табылып, аныктама боюнча функция

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}=2$ пределине ээ болот.◄

20) $f(x,y)=\frac{x^4+y^2}{x^2+y^4}$ функциясын$x\to\infty$, $y\to\infty$ умтулгандагы пределι жашабай тургандыгын көрсөткүлө.

Чыгаруу:► Аргументтер же тегиздиктеги $(x;y)$ координаталуу чекиттер, чексиз алыстатылган чекитке $y=x^4$ ийрисиндеги чекиттер аркылуу жөнөп жетсин дейли, анда бул ийринин параметрдик $\begin{cases}x=t,\\ y=t^4\end{cases}$ теңдемесин түзсөк, берилген функция $f(x,y)=f(t,t^4)=\frac{t^4+t^8}{t^2+t^{16}}=\frac{t^2+t^6}{1+t^{14}}$ көрүнүшкө келет. Ийринин чекиттеринде $(x\to\infty,\ y\to\infty)\Leftrightarrow t\to\infty$ болгондуктан, функциянын пределин

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}f(x,y)=\lim\limits_{t\to\infty}f(t,t^4)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^2+t^6}{1+t^{14}}=0$ көрүнүштө эсептөөгө болот.

Экинчи жактан $(x;y)$ чекиттери, чексиз алыстатылган чекитке $x=y^2$ ийрисинде жайгашкан чекиттер менен жүрүп олтуруп жетсе, анда ийринин теңдемесин $\begin{cases}x=t^2,\\ y=t\end{cases}$ параметрдик көрүнүштө жазуу менен, функциянын предели

$\lim\limits_{t\to\infty}f(t^2,t)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^8+t^2}{t^4+t^4}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t^8\cdot(1+\frac{1}{t^6})}{t^8\cdot(\frac{2}{t^4})}=\frac{1+0}{0}=\infty$ болорун көрөбүз. Ошентип эки өзгөрүлмөлүү функциянын аргументтери болушкан $(x;y)$ чекиттери, тегиздиктеги чексиз алыстатылган чекитке эки башка жол менен же эки башка ийрилерде жайгашкан чекиттер менен умтулганда, функция эки башка 0 жана ∞ жекече пределдерине жетти. Демек берилген функциянын $x\to\infty$, $y\to\infty$ умтулгандагы предели жашабайт, анткени функциянын предели жалгыз гана болуп, ал бардык жекече пределдер менен тең болушу керек эле.◄

21) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}, \text{эгерде } x\neq y \text{ болсо,}\\ 4, \quad \text{эгерде } x=y \text{ болсо}\end{cases}$ функциясын

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to2}} f(x,y)$ кош пределин тапкыла.

Чыгаруу:► Эгерде $x\neq y$ болсо, $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2+x-y}=\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{(x-y)\cdot(x-y+1)}=\frac{(x+y)}{(x-y+1)}$ көрүнүшүнө келип, анын кош предели

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to2}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\ y\to2}}\frac{(x+y)}{(x-y+1)}=\frac{4}{1}=4$ санына барбар болот. Ошол эле учурда $x=y$ болсо, $f(x,y)=4$ болгондуктан, эки өзгөрүлмөлүү функциянын аргументтери болгон $(x;y)$ чекиттери, (2; 2) чекитине кайсы жагынан жакындашынан көз каранды болбостон, функциянын предели 4 санына барабар болот. Тегиздиктеги $y=x$ түзү, берилген функцияга өзгөчө сызык болот, анткени бул түздө жайгашкан чекиттерде бөлчөктүн алымы жана бөлүмү нөлгө айланып, аныксыздык келип чыгат. Демек $(x;y)$ чекиттери, $y=x$ өзгөчө түзүндө жайгашкан чекиттер аркылуу

(2; 2) чекитине умтулуп келе албастан, функция ушул чекиттеги пределдик 4 маанисине жетүү жолунда $y=x$ түзүнөн секирип өтөт деп элестетебиз.◄

22) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin(x^2y)}{x^2}, \quad \text{эгерде } x\neq 0 \text{ болсо,}\\ 3, \quad x=0 \text{ болсо}\end{cases}$ функциясын кош

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to3}} f(x,y)$ пределин тапкыла.

Чыгаруу: ►$\alpha=x^2y$ белгилөөсүн киргизсек, анда $(x\to0,\ y\to3)$ ⇨ $\alpha\to0$ болуп, функциянын предели

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to3}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to3}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to3}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2\cdot y}\cdot y=\lim\limits_{\substack{\alpha\to0\\ y\to3}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot y=1\cdot3=3$

көрүнүштө табылат. Ал эми $x=0$ болсо, $f(x,y)=3$ болгондуктан, $(x;y)$ аргументтери (чекиттери) пределдик (0; 3) чекитине кайсы багыттан келсе да, $f(x,y)$ функциясын (0; 3) чекитиндеги предели А =

3 саны болот. Бирок $x = 0,\ y = 3$ болгондо, $\frac{\sin(x^2y)}{x^2}$ бөлчөгүнүн алымы жана бөлүмү нөлгө айланып, аныксыздык келип чыккандыктан, (0; 3) чекити функцияга өзгөчө чекит болуп, аргументтер Оy огунда ($x = 0$ түзүндө) жайгашкан чекиттер аркылуу (0; 3) чекитине жакындап келе албаса да, функция пределдик А = 3 маанисине секирип жетет.◄

23) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, & \text{эгерде } x \neq -y \text{ болсо,} \\ 0, & \text{эгерде } x = -y \text{ болсо} \end{cases}$ функциянын $x \to 0,\ y \to 0$ учурдагы кайталанма пределдерин тапкыла.

Чыгаруу: ► Убактылуу y өзгөрүлмөсү боюнча 0 гө умтулуу процессин токтотуп ($y \neq 0$), x боюнча 0 гө умтулалы, анда

$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \frac{-y+y^2}{y} = -1 + y$ келип чыгат. Кайра y ти кыймылга киргизсек, кайталанма предели

$\lim\limits_{x\to 0} \left\{ \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) \right\} = \lim\limits_{y\to 0} (-1 + y) = -1$ табылат.

Экинчи жактан, x өзгөрүлмөсүн кыймылын токтотуп ($x \neq 0$), y боюнча пределге өтсөк $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y} = \frac{x+x^2}{x} = 1 + x$ болуп, кийинки кайталанма предел $\lim\limits_{y\to 0} \left\{ \lim\limits_{x\to 0} f(x,y) \right\} = \lim\limits_{x\to 0} (1 + x) = 1$ санына барабар болот.◄

Ошентип $(x; y)$ аргументтеринин, (0; 0) чекитине умтулуу процесси x жана yөзгөрүлмөлөрү боюнча кезектешип жүрөт десек, анда берилген мисалда алардын умтулуу кезектерин алмаштырууга болбосун көрөбүз.

Көнүгүүлөр

Пределин эсептегиле:

7.1 а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$, (Жообу $-\frac{1}{2}$) ; б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$, (Жообу $\frac{1}{4}$) ;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$, (Жообу $\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$) ; г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+x^2+x^3+\cdots+x^n-n}{x-1}$, (Жообу $\frac{n}{n+1}$);

д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m,n\in N)$, (Жообу $\frac{m}{n}$); е) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$, (Жообу $2\frac{1}{24}$) ;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$, (Жообу 1); з) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$, (Жообу $-\frac{1}{16}$) ;

и) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$, (Жообу $\frac{4}{3}$) ; к) $\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$, (Жообу -2) ;

л) $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$, (Жообу $\frac{1}{4}$) ; м) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$, (Жообу $\frac{1}{144}$) ;

н) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$, (Жообу $\frac{1}{4}$) ; п) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$, (Жообу $4\frac{4}{27}$) ;

р) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$, (Жообу $\frac{3}{2}$) ; с) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$, (Жообу $-\frac{1}{2}$) ;

т) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\frac{x}{2}}}$, (Жообу $\frac{7}{36}$) ; у) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m,n\in N)$, (Жообу $\frac{n}{m}$) ;

ф) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-\sqrt{x}}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$, (Жообу $\frac{1}{2}$) ; х) $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$,

(Жообу $-\frac{1}{4}$) ; ц) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$, (Жообу 1) ;

ч) $\lim\limits_{x\to \infty}x^{\frac{1}{3}}\left\{(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\right\}$, (Жообу $\frac{4}{3}$) ;

7.2 Тригонометриялык функциялардын пределин эсептегиле:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$, (Жообу 1) ; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{sin5x}$, (Жообу $\frac{2}{5}$);

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos^3x}{x\sin 2x}$, (Жообу $\frac{3}{4}$) ; г) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{tg\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$, (Жообу ∞) ;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tgx}\right)$, (Жообу 0) ; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$, (Жообу $\frac{1}{2}$) ;

ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$, (Жообу ∞) ; з) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$, (Жообу $-\frac{3}{2}$) ;

и) $\lim\limits_{z\to a}(\sin\frac{z-a}{2}\cdot tg\frac{\pi z}{2a})$, (Жообу $-\frac{a}{\pi}$) ; к) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\cdot tgx-\frac{\pi}{\cos x}\right)$,

(Жообу -2) ; л) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$, (Жообу 2) ; м) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$,

(Жообу $\frac{\sqrt{2}}{2}$) ; н) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$, (Жообу $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$) ; п) $\lim\limits_{\alpha\to\beta}\frac{sin^2\alpha-cos^2\beta}{\alpha^2-\beta^2}$,

(Жообу $\frac{\sin 2\beta}{2\beta}$) ; р) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{tg(a+x)-tg(a-x)}$, (Жообу cos^3a) ;

с) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{sin^2x}$, (Жообу $\frac{\sqrt{2}}{8}$) ; т) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{tgx}$, (Жообу 1) ;

у) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2x}$, (Жообу 6) ;

7.3 Экинчи сонун пределди пайдаланып, төмөндөгү пределдерди эсептегиле:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$, (Жообу $\frac{1}{e}$) ; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$, (Жообу e^6) ;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$, (Жообу e^2) ;

7.4 Чексиз кичине чоңдуктарды салыштыргыла.

а) $x=1$ чекитинде $y=\frac{1-x}{1+x}$, $y=1-\sqrt{x}$ функциялары чексиз кичине чоңдук экендигин текшерип, кайсынысы жогорку тартиптеги чексиз кичине функция болорун аныктагыла.

б) $y=x^3$ $(x\neq 0)$ функциясы берилсе, анда $\Delta x\to 0$ умтулганда $\Delta x,\Delta y$ өсүндүлөрү бирдей тартиптеги чексиз кичине чоңдук болорун далилдеп, x өзгөрүлмөсүнүн кандай маанисинде эквиваленттүү болоруна жооп бергиле. $x=0$ болгондо Δy чоңдугу, Δx ке караганда жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук экенин көрсөткүлө.

в) $x = 0$ чекитине жетишерлик жакын аймакчада, x негизги кичине чоңдугуна салыштырмалуу, төмөндөгү чексиз кичине чоңдуктардын тартиптерин аныктагыла:

1) $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$; 2) $\sqrt{1+2x} - 1 - \sqrt{x}$; 3) $\sqrt{1+x^2}\, tg\frac{\pi x}{2}$;

7.5 $x \to 0$ болгондо төмөндөгү теңдештиктердин туура экендигин далилдегиле:

а) $2x - x^2 = o(x)$; б) $x \sin\sqrt{x} = o(x^{\frac{3}{2}})$; в) $x \sin\frac{1}{x} = o(|x|)$;

г) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$;

7.6 $x \to \infty$ умтулганда а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = o(x^3)$; б) $\frac{x+1}{x^2+1} = o\left(\frac{1}{x}\right)$;

в) $x + x^2 \sin x = o(x^2)$ болорун көрсөткүлө.

7.7 Бир жактуу пределдерин тапкыла:

а) $f_1(x) = \begin{cases} x+1\ , \text{ эгерде } x \le 2 \text{ болсо,} \\ -2x+1, \text{ эгерде } x > 2 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясын $x \to 2$ болгондогу. (Жообу $f_1(2+) = -3, f_1(2-) = 3$) ;

б) $x \to 0$ болгондо, $f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ $(x \ne 0)$ функциясын

(Жообу $f_2(0+) = 1\ , f_2(0-) = -1)$;

в) $x \to 1$ болгондо, $f_3(x) = \frac{x^3-1}{|x-1|}(x \ne 1)$ функциясыны (Жообу $f_3(0+) = 3,\ f_3(0-) = -3)$;

7.8 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын пределдерин тапкыла:

а) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{1+x^2 y} - 1}\ , \text{ эгерде } x^2 y \ne 0 \text{ болсо,} \\ 2\ , \quad \text{эгерде } x^2 y = 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясын

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 1}} f(x,y)$ кош пределин эсептегиле. (Жообу 2) ;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$ эсептегиле. (Жообу 0) ;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin\ (y^2x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ эсептегиле. (Жообу 0) ;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+y^2x^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ эсептегиле. (Жообу 1) ;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \frac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2}$ эсептегиле. (Жообу 0) ;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ эсептегиле. (Жообу 1) ;

ж) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}, & x \neq y \text{ болсо,} \\ \frac{4}{3}, & x = y \text{ болсо} \end{cases}$ функциясын

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x,y)$ кош пределин эсептегиле. (Жообу $\frac{4}{3}$) ;

з) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+\ y^3}{x^4+\ y^3}, & (x;y) \neq (0;0) \text{ болсо,} \\ 0, & (x;y) = (0;0) \text{ болсо} \end{cases}$ функциясын O(0; 0) чекитинде пределге ээ болбосун көрсөткүлө.

VIII ГЛАВА. ФУНКЦИЯЛАРДЫН ҮЗГҮЛТҮКСҮЗДҮГҮ

§8.1 Үзгүлтүксүз функциялар

8.1.1 Функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү

Математикада предел аппаратынын түзүлүшү менен, чөйрө таануу процессинде чоң бурулуш болгон. Анткени мурда математикада стационардык (турактуу) абалдагы кубулуштарды гана моделдештирүүгө мүмкүнчүлүк болсо, пределдин жардамы менен эркин кыймылдагы кубулуштардын чекиттеги абалына чейин сүңгүп кирип, териштирүүгө мүмкүнчүлүк түзүлдү. Чөйрөнүн ар кайсы бөлүктөрүндө чексиз көп кубулуштар, окуялар жүрүп жаткандыгына карабастан, алардын ар бир абалдарын сандар менен белгилеп, же орнотулган эреже - функциялардын жардамы менен турган абалдарын, сандардын көптүктөрүнө чагылтып, кубулуштар жүрүп жаткан чекиттерден маалымат алып, аларды таанып үйрөнөбүз. Чөйрө мейкиндиктеринин сан моделдеринде баяндалгандай (§1.2, 1 – бөлүк), коңшулук деңгээлге чейинки тактыкта айырмалоого мүмкүн болбогон кубулуштар менен, алардын сандык моделдеринин арасында өз ара бир маанилүү тиешелештик орнотууга болот. Функциянын предели ошол ар бир чекиттердеги кубулуштардын жүрүүсүнүн жыштык процесстери менен, алардын элестери болгон сандардын (функциянын маанилерин) жайгашуу жыштыктарын салыштырып, баалоого шарт түзөт.

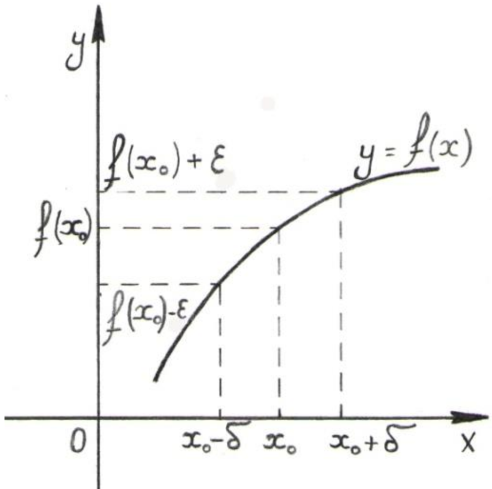
Айталы, $y = f(x)$ функциясы X көптүгүндө аныкталган же ушул көптүктөгү x сандары (чекиттери) менен белгиленген кубулуштарды, Y сандык көптүгүнө чагылтуучу эреже – мыйзам болсун ($x \in$ X, $y \in$Y $\subseteq$R). x кубулуштары a чекитине чексиз жакын аралыкта болуп өтсө, же ушул чекитте коюуланса, анда алардын элестери болгон кубулуштар же функциянын $y = f(x)$ маанилери, кайсы бир А санына чексиз жакындайт же коюуланат деген түшүнүктү символикалык түрдө $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ предели менен белгилегенбиз. Бирок, берилген a чекитинин өзүндө $f(x)$ функциясын $f(a)$ маанисинин жашар-жашабасын б.а., функциянын аныкталар-аныкталбасын айткан эмеспиз.

Функциянын a чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүн a чекитиндеги пределимененадаштырбас үчүн, a чектин x_0 деп белгилейли ($x_0 = a$). Кааласак X көптүгүнөн a чектинен башка бир кыймылы токтотулган (фиксирленген) x_0 коюулануу чекитин алалы. $f(x)$ функциясы **ушул чекитте жана анын жакынкы аймакчасында аныкталсын** деп, функциянын $x \to x_0$ умтулгандагы пределине токтололу.

8.1 Аныктама. *Эгерде $f(x)$ функциясын x_0 чекитиндеги предели жашаса жана ал x_0 чекитиндеги функциянын $f(x_0)$ маанисине барабар болсо, анда $f(x)$ функциясын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп айтабыз жана символикалык түрдө*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (8.1)$$

көрүнүштө жазабыз. $f(x)$ функциясы X көптүгүнүн бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз болсо, аны бүтүндөй X көптүгүндө үзгүлтүксүз функция дейбиз. Ал эми $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ болсо, анда $f(x)$ ти x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ деп айтабыз, б.а. функция үзгүлтүксүз болбогон чекитте үзүлүшкө ээ болот.



8.1-чийме

Бул аныктаманы, оргинал-аргументтер кайсыл чекитке жыйналаса, алардын элестери да, ошол чекиттин элесине гана жыйналат деп түшүнсө болот.

- Ошентип чекиттеги үзгүлтүксүз функцияларда аргументтер кайсы чекитке жыйналса, тиешелүү функциянын маанилери да ошол чекиттеги функциянын маанисине жыйналгандыктан, үзгүлтүксүз функциянын белгисинин алдынан пределге өтүү мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)\,. \qquad (8.2)$$

Бул мүмкүнчүлүктү пайдаланып, үзгүлтүксүз функциялардын пределдерин эсептөө ыкмаларын жаңы сонун пределдер менен кеңейтүүгө болот.

Чекиттеги үзгүлтүксүздүк түшүнүгүн аралыктардын, өсүндүлөрдүн, удаалаштыктардын тилдеринде чечмелеп, (8.1) тең күчтүү болгон аныктамаларды келтирип чыгарууга да болот:

- **1.** x_0 чекитиндеги үзгүлтүксүз функция түшүнүгү, ушул чекиттеги функциянын предели менен аныкталгандыктан, 8.1 – аныктамасын R мейкиндигиндеги аралыктарды ченөө эрежесин (метриканын) жардамы менен түшүндүрөлү: Функциянын чекиттеги пределин 7.1 – аныктамасына ылайык,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0:$$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *болушу керек, б.а. алдын ала жетишерлик кичине деп тандалган* $\varepsilon > 0$ *санына жараша, кандайдыр бир* $\delta > 0$ *саны табылып, аргументтердин* $|x - x_0| < \delta$ *жакындыкта жайгашышынан, алардын тиешелүү маанилерин* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *жакындыгында жайгашышы келип чыкса, анда* $f(x)$ *ти* x_0 *чекитинде үзгүлтүксүз функция дейбиз (8.1 – чийме).Эркин берилген* ε *санына менен ыңгайлаштыра аныкталуучу* δ *саны,* x_0 *менен* ε *сандарынан көз каранды* $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ *болот.*

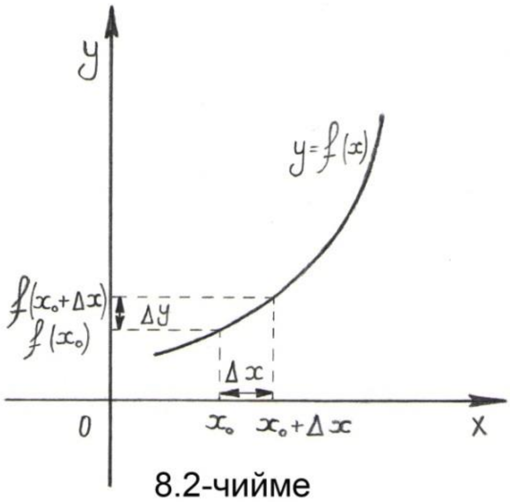
- **2.** Функциянын a чекитиндеги пределинде $x \neq a$ деп ойлоп, a чекитиндеги функциянын $f(a)$ мааниси жашайбы же жокпу ага кызыкпастан, анын ушул чекиттеги предели болгон A санына көңүл бурганбыз. Функциянын x_0 чекитиндеги үзгүлтүксүздүгүндө, пределдик $x = x_0$ чекитинде жана анын жетишерлик кичине аймакчасында $f(x_0)$ менен кошо, $\{f(x)\}$ маанилерин жашашы негизги шарттардын бири болуп эсептелет. Айтылган шарттарды эске алып, функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн өсүндүлөр тилинде түшүндүрүүгө болот. Айталы $y = f(x)$ функциясы x_0 чекитинде жана анын жакынкы чеке белинде аныкталсын (жашасын), анда x_0 гө жетишерлик кичине Δx өсүндүсүн кошуу менен, x_0 чекитин сөз кылынган чеке белден чыгып кетпей тургандай $x_0 + \Delta x$ абалына козгоого болот. Бул учурдагы функциянын козголуу же термелүү $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ чоңдугун,

x_0 чекитиндеги Δx өсүндүсүнө туура келүүчү функциянын өсүндүсү деп атайбыз (8.2– чийме). Мындан

$x \to x_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$ тең күчтүү экендигин байкап, (8.1) эрежесин өсүндүлөр тилинде $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f\,(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ же

$$\lim_{\Delta x \to 0}\{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\} = 0 \text{ же } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \qquad (8.3)$$

көрүнүштөрдө жазууга болорун байкайбыз. *Демек x_0 чекитиндеги аргументтин өсүндүсү нөлгө умтулганда, функциянын тиешелүү өсүндүсү да нөлгө умтулса, анда x_0 чекитинде функцияны үзгүлтүкүз деп айтууга болот* деген натыйжага келебиз. Үзгүлтүксүз функциялар аргументтердин x_0 чекитиндеги жетишерлик кичине козголуусуна же термелүүсүнө, функциянын ушул чекиттеги маанисинин жетишерлик кичине козголуусу же термелүүсү менен жооп беришет. Ошондуктан *үзгүлтүксүз функция* деген түшүнүк, иш жүзүндөгү кубулуштардын жүрүү жыштыгы менен, алардын элестеринин жыштык байланыштарын баалоо аппараты болорун байкайбыз.



8.2-чийме

- **3.** Функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн удаалаштыктар тилинде түшүндүрөлү: *x_0 чекити X көптүгүн коюулануу чекити болгондуктан, бул көптүктүн элементтеринен x_0 чекитине жыйналуучу чексиз көп удаалаштыктарды түзүү мүмкүн. Ошол удаалаштыктардын арасынан кайсынысын $x_1, x_2, x_3, \ \dots, x_n, \dots \to x_0$ тандаганыбыздан көз каранды болбостон, функциянын тиешелүү маанилеринен түзүлгөн удаалаштык дайыма*

$f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_n)$, ... $\to f(x_0)$ пределине ээ болсо, анда $f(x)$ функциясын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз деп айтабыз.

Пределдердин касиеттерине таянып, бир X көптүгүндө аныкталышып, анын x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болушкан $f(x)$, g(x), …

сыяктуу чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын $f(x) \pm g(x)$ суммасы, $f(x) \cdot g(x)$ көбөйтүндүсү,

$\frac{f(x)}{g(x)}$ тийиндиси ($g(x_0) \neq 0$) да, x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функциялар болорун көрсөтүүгө болот.

8.1.2 Элементардык функциялардын үзгүлтүксүздүгү

8.1 Теорема. *Бардык элементардык функциялар өз аныкталуу областтарын чегиндеги бардык чекиттерде үзгүлтүксүз функциялар болушат.*

Теореманын далилдөөсүн айрым элементардык функциялар үчүн көрсөтүп, калгандары үчүн далилдөөсүз кабыл алабыз. Анткени функциянын чекиттеги пределдерин эсептөө ыкмалары менен, алардын үзгүлтүксүздүгүн көрсөтүү ыкмалары окшош болушат.

1) $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ функциясын үзгүлтүксүздүгүн көрсөтөлү.

$f(x) = x$ функциясы $X =]-\infty, +\infty[\equiv R$ аралыгындагы каалаган x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болот, анткени бул аралыктагы ар бир чыныгы сан коюуланууу чекити болуп, алардын ар бирин x_0 чекити деп алып, ага умтулуучу чексиз көп удаалаштыктарды түзүүгө болот. Бул учурда түзүлгөн удаалаштыктар менен ага тиешелүү чекиттердеги функциянын маанилерин удаалаштыгы дал келгендиктен, 8.1 – аныктамасы аткарылып, функция үзгүлтүксүз болот.

$f(x) = ax^n = a\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{n\text{жолу}}$ функциясы, x_0 чекитиндеги чектүү сандагы $f(x) = x$ үзгүлтүксүз функциялардын көбөйтүндүсү катарында үзгүлтүксүз болот.

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ функциясын x_0 чекитиндеги чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын суммасы катарында, өзүнүн $X =]-\infty, +\infty[\equiv R$ аныкталуу областын ичиндеги бардык x_0 чекиттеринде үзгүлтүксүз деп эсептөөгө болот.

2) $f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$ функциясын да өз аныкталуу областынын чегинде бөлүмү ($b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m \neq 0$

нөл эмес чекиттерде үзгүлтүксүз функциялардын катышы катарында, үзгүлтүксүз функция деп эсептей алабыз.

3) $f(x) = \sin x$ функциясы да аныкталуу областынын бардык x_0 чекиттеринде үзгүлтүксүз функция болот. Чынында эле (7.15) барабарсыздыгын эске алсак (7.2.1 – караңыз), $0 < x < \frac{\pi}{2}$ болгондо $\sin x < x$ барабарсыздыгы орун алат. Жалпы x тер үчүн $|\sin x| \leq 1$ барабарсыздыгы аткарылгандыктан, $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ *жана* $|x| > 1$ *болгондо* деле $|\sin x| \leq |x|$ барабарсыздыгын орун аларын байкайбыз. Демек

$|\sin x - \sin x_0| = 2 \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0| < \varepsilon$

барабарсыздыгы аткарылып, алдын ала кандай гана жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санын албайлы, $|f(x) - f(x_0)| = |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ шарты аткарыла тургандай аргументтердин $|x - x_0| < \delta$ чеке белин түзүү мүмкүн, же ушундай аймакчанын чегин көрсөтүүчү изделген δ саны деп, ε санын өзүн алууга болорун көрөбүз $\delta = \varepsilon$.

$\cos x$ функциясын да, аныкталуу областынын ар бир x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болорун ушундай эле көрсөтүп, үзгүлтүксүз функциялардын катышы катарында тригонометриялык tg$x$, ctg$x$, sec$x$, cosec$x$ функциялардын, өз аныкталуу областтарын ички чекиттеринде үзгүлтүксүз функциялар болоруна ишенебиз.

4) $y = x^2 + 1$ функциясын үзгүлтүксүздүгүн далилдегиле.

Далилдөө: Берилген функциянын аныкталуу областы X = $]-\infty, +\infty[$ көптүгү болот. Анын каалаган жеринен x_0 чекитин алып, ага $x_0 + \Delta x$ өсүндүсүн (козголуусун) берели. Бул учурда функция да тиешелүү

$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 + 1 - ({x_0}^2 + 1) = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$ өсүндүгө ээ болот. Анда

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0\Delta x + \Delta x^2) = 0$ келип чыгып, үзгүлтүксүздүктүн 7.1 – аныктамасынын өсүндүлөр тилиндеги чечмеленишине ылайык, берилген функция аныкталуу X = $]-\infty, +\infty[$ областынын бардык чекиттеринде үзгүлтүксүз функция болот.

Өз аныкталуу областтарында үзгүлтүксүз болгон негизги элементардык функциялардын тизмесин жазалы:

1. $y = x^{\alpha}$ $-$даражалуу функция, X = $]0, +\infty[$ көптүгүндө;

2. $y = a^{x}$ $-$көрсөткүчтүү функция $(a > 0, a \neq 1)$, X = $]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областында;

3. $y = log_{a}x$ $-$логарифмалык функция $(a > 0, a \neq 1)$, X = $]0, +\infty[$ аныкталуу областында;

4. Тригонометриялык функциялар:

$y = \sin x$ –функция, X = $]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областында;

$y = \cos x$–функция,X = $]-\infty, +\infty[$ аныкталуу областында;

$y = tgx$–функция, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ болгондо;

$y = ctgx$ $-$функция, $x \neq \pi k,\ k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ болгондо.

5. Тескери тригонометриялык функциялар:

$y = arcsinx$–функция, $-1 \leq x \leq 1$ болгондо;

$y = arccosx$ $-$функция, $-1 \leq x \leq 1$ болгондо;

$y = arctgx$ $-$функция, $-\infty < x < \infty$ болгондо;

$y = arcctgx$ $-$функция, $-\infty < x < \infty$ болгондо.

8.1.3 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү

Айталы $y = f(x)$ аныкталуу областы X $\subseteq R^{n}$, өзгөрүү областы Y $\subseteq$ R болгон n өзгөрүлмөлүү функция болсун. Аргументтер n өлчөмдүү мейкиндикте өзгөргөндүктөн, алардын ар бирин $x = \{x_1;\ x_2;\ \dots;\ x_n\}$ көрүнүштө, n координаталары менен жазылышкан чекиттер десек болот. Х көптүгүнөн эркин тандалган $x_0 = \{x_1^0; x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ чекитин алып, аны убактылуу кыймылы токтотулган (фиксирленген) деп эсептейли.

8.2 Аныктама. *Эгерде* $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *функциясын* $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ *чекитиндеги предели жашаса жана анын мааниси функциянын ушул чекиттеги* $f(x_1^0, x_2^0,\ \dots, x_n^0)$ *маанисине барабар болсо, анда бул функцияны*

$x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ *чекитинде үзгүлтүксүз деп айтабыз. Үзгүлтүксүздүк шартын символдук жазылышы*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0,\ \dots, x_n^0) \qquad (8.4)$$

n *эселүү предел көрүнүштө болот. Эгерде бул шарт аткарылбаса же*

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq f(x_1^0, x_2^0,\ \dots, x_n^0) \qquad (8.5)$$

болсо, анда берилген функцияны $x_0 = \{x_1^0; x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ *чекитинде үзүлүшкө ээ дейбиз, б.а. функция үзгүлтүксүз эмес болгон чекитте үзүлүшкө ээ болот.*

Ошентип n өзгөрүлмөлүү функция үзгүлтүксүз дегенди, ар бир өзгөрүлмөсү боюнча үзгүлтүксүз деп түшүнөбүз. Бирок, тескерисинче көп өзгөрүлмөлүү функциянын кайсы бир багыттар боюнча ар бир өзгөрүлмөлөргө карата үзгүлтүксүз болушунан, ар дайым эле функциянын өзүнүн үзгүлтүксүздүгү келип чыга бербей турганын эскерте кетебиз. Мисалы,

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ } \textit{болсо}, \\ 0, & x = y = 0 \text{ } \textit{болсо} \end{cases}$ функциясы $M_0(0;0)$ чекитинде ар бир өзгөрүлмөлөр боюнча үзгүлтүксүз. Анткени $y = 0$ түзү боюнча $M_0(0;0)$ чекитине умтулсак $\forall x: \lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0) = f(M_0)$, ал эми $x = 0$ түзү боюнча умтулсак $\forall y: \lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0) = f(M_0)$

болуп, берилген функция ар бир x, y өзгөрүлмөлөрү боюнча өз өзүнчө үзгүлтүксүз болорун көрөбүз. Бирок $M_0(0;0)$ чекитине $y = x$ түзү боюнча умтулганда $\lim\limits_{x=y\to 0} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1 \neq 0 = f(M_0)$ келип чыгып, функциянын M_0 чекитинде үзүлүшкө ээ экендигин көрөбүз. Демек, көп өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги предели умтулуу багыттарынан көз каранды болгондуктан, ар бир өзгөрүлмөлөр боюнча бардык багыттар боюнча үзгүлтүксүз болгондо гана, функцияны ошол чекитте үзгүлтүксүз дейбиз. Ошондой эле үзгүлтүксүздүктүн аралыктар, өсүндүлөр, удаалаштыктар тилиндеги аныктамаларын да, n өзгөрүлмөлүү функциянын пределин маанисинде түшүндүрүүгө болот. Мисалы эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x,y)$ функциясынын $M_0(x_0; y_0)$ чекитинде аргументтердин өсүндүлөрү (термелүүсү)

$x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$, ал эми функциянын тиешелүү термелүүсү

$\Delta u = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)$ көрүнүштө болуп, эки өзгөрүлмөлүү функциянын $M_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүгү, өсүндүлөр тилинде

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta u = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \{f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)\} = 0$ кош пределинин нөл санына барабар болушу менен аныкталат. Ал эми аралыктардын тилинде $M_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги үзгүлтүксүздүк

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \wedge |y - y_0| < \delta \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ |f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)| < \varepsilon$ шартынын аткарылышы менен түшүндүрүлөт.

Иш жүзүндө чөйрө кубулуштары, көп өлчөмдүү X мейкиндиктеринде болуп өткөндүктөн, кубулуштар менен Y көптүгүндөгү алардын элестери болгон чыныгы сандардын арасындагы байланыштар үзгүлтүксүз функциялар аркылуу орнотулат деп ойлойбуз.

Мисалы: $z = x^2 + y^2$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы $M_0(0;\ 1)$ чекитинде үзгүлтүксүз, анткени $z(M_0) = 0^2 + 1^2 = 1$ жана

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}(x^2+y^2)=1=z(M_0)$ болуп, 8.2 – аныктамасы аткарылат. Ошондой эле, аны аралыктардын тилинде да ырастоого болот. Алдын ала кандай гана $\varepsilon>0$ жетишерлик кичине санын албайлы

$$|z(M)-z(M_0)|=|x^2+y^2-1|\leq|x^2|+|y^2-1|=$$

$=|x|^2+|y-1|\cdot|y+1|\leq|x-0|^2+4\cdot|y-1|<\delta^2+4\delta=\varepsilon$ деп алсак (экинчи көбйтүүчүдө y тин жетишерлик кичине

δ −аймакчадагы эң чоң маанисин $y=3$ деп, алдык, анда $\delta=\delta(\varepsilon,M_0)$

саны деп, $\delta^2+4\delta-\varepsilon=0$ теңдемесин $\delta_1=-2+\sqrt{2+\varepsilon}$ оң белгидеги чечимин тандап алабыз. Демек, $\exists\delta_1>0$ табылып

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0{:}\ |x-0|<\delta_1\wedge|y-1|<\delta_1\Rightarrow|z(M)-z(M_0)|<\varepsilon,$
$z=x^2+y^2$ функциясы $M_0(0;\,1)$ чекитинде үзгүлтүксүз болот.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги үзгүлтүксүздүгү, бир өзгөрүлмөлүү функциялардын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн жалпыланышы болуп, ар бир координаталар (өзгөрүлмөлөр) боюнча кайталануучу мүнөзгө ээ болгондуктан, мындан ары үзгүлтүксүз функцияларга тиешелүү касиеттерди, көп өзгөрүлмөлүү функцияларда да аткарылат деп эсептейбиз. Демек чектүү сандагы көп өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялардын суммасы, көбөйтүндүсү жана тийиндиси (бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгондо) үзгүлтүксүз функциялар болушат. Ошондой эле көп өзгөрүлмөлүү элементардык функциялар да, өз аныкталуу областарында үзгүлтүксүз функциялар болуп эсептелишет.

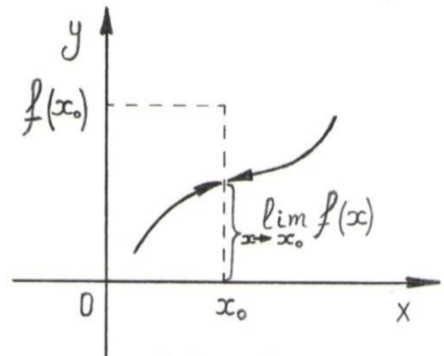
8.1.4 Функциянын үзүлүү чекиттери жана аларды классификациялоо

x_0 чекитинде жана анын жакынкы чеке белинде аныкталган $y=f(x)$ функциясы берилсе (жашаса) жана $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ болсо, анда аны x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция деп айттык. Функциянын чекиттеги предели жашаса, анда ал жалгыз гана болуп, бир жактуу пределдерине тең болгондуктан, функция x_0 чекитинде оң жактан жана сол жактан

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) = f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad (8.6)$$

үзгүлтүксүз болгондо гана, үзгүлтүксүз болорун көрөбүз.

Айталы, функция x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ болсун $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ дейли. Анда төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:



8.3-чийме

1^0. $y = f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f(x_0-0)$ сол жактуу, $f(x_0+0)$ оң жактуу пределдери жашап, алар барабар

$f(x_0-0) = f(x_0+0)$ болушканы менен, функциянын x_0 чекитиндеги $f(x_0)$ маанисине тең эмес болушсун (8.3 – чийме).

Бул учурда x_0 чекитин $f(x)$ функциясын жоюлуучу үзүлүү чекити деп айтабыз, анткени берилген функцияны x_0 чекитинде

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{эгерде} x \neq x_0 \textit{болсо}; \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \textit{эгерде} x = x_0 \textit{болсо} \end{cases}$$

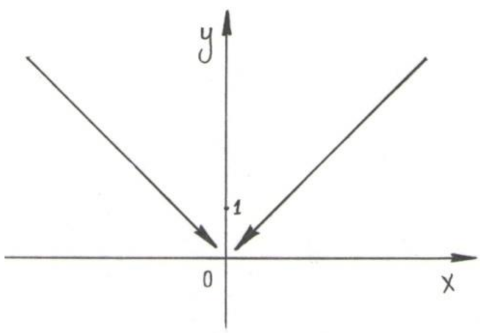
көрүнүштө кошумча аныктоо менен, берилген функцияны (8.6) теңдештиги орун ала тургандай үзгүлтүксүз $F(x)$ функциясына айлантууга болот. Мисалы

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \textit{ болсо}, \\ 1, & x = 0 \textit{ болсо} \end{cases}$$

функциясы $x_0 = 0$ чекитинде жоюлуп кетүүчү үзүлүшкө ээ. Анткени бул чекиттеги оң жана сол жактуу пределдери жашашып барабар болушканы менен

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0 \neq f(x_0) = 1,$$

функциянын ушул чекиттеги маанисине барабар эмес (8.4 – чийме). Эгерде функциянын $x_0 = 0$ чекитиндеги маанисине $f(x_0) = f(0) = 0$ деген түзөтүү киргизсек, анда берилген функция бул чекитте үзгүлтүксүз

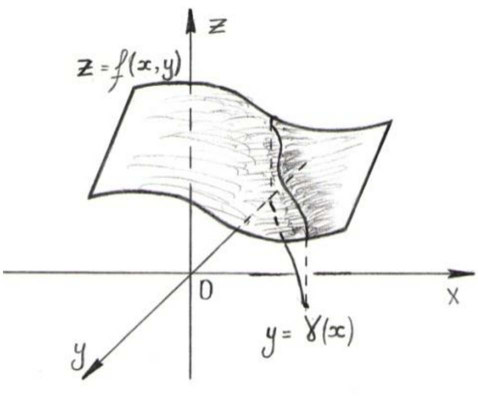


8.4-чийме

$\mathrm{F}(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \text{ болсо}, \\ 0, & x = 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясына айланып, үзүлүү чекити жоюлат.

Жоюлуучу x_0 үзүлүү чекитине ээ болгон функциянын графигинде бир гана $(x_0;\ f(x_0))$ чекити кыркылып, башка чекитке жылып калганын көрөбүз (8.3, 8.4 чиймелер). Графиктеги кыркылып тешилген чекитке, оң жана сол жактуу пределдерге барабар болгон жаңы маанини берүү менен тешикче бүтөлүп, үзүлүү жоюлганын байкайбыз.

Эки өзгөрүлмөлүү $z = f(x, y)$ функциясына, $M_0(x_0;\ y_0)$ чекити жоюлуучу үзүлүү чекит болсо, анда анын графиги болгон бет, бир гана $(M_0(x_0;\ y_0);\ f(x_0, y_0))$ координаталуу чекитте тешикчеге ээ болуп, функцияны бул чекитте үзгүлтүксүз боло тургандай кайта аныктап, үзүлүүнү жоюууга болот. Айрым учурларда жоюлуучу үзүлүү чекити, жоюлуучу үзүлүү сызыгына (түзгө же ийриге) айланып, функциянын графиги болгон бет, ошол сызык бойлой жарака көрүнүштөгү үзүлүүгө дуушар болот (8.5 – чийме). Мындай жараканы бүтөө үчүн, жараканын (ийринин) параметрдик $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ же айкын $y = \tau(x)$ көрүнүштөгү теңдемелерин пайдаланып, эки өзгөрүлмөлүү функциянын жаракадагы маанилерин,



8.5-чийме

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ пределине теңдеп кайра түзөбүз.

2^0. Бир өзгөрүлмөлүү $y = f(x)$ тин x_0 чекитиндеги $f(x_0 - 0)$ сол жактан, $f(x_0 + 0)$ оң жактан чектүү пределдери жашап,

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

алар барабар эмес болушсун.

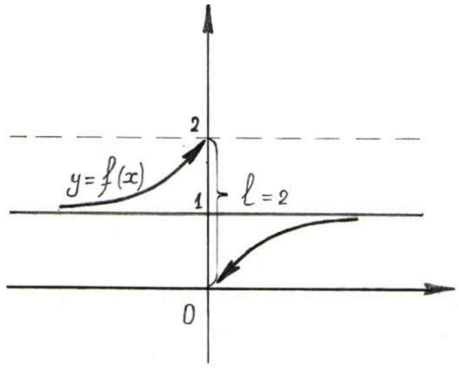
Бул учурда функцияны $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ болсо сол жактан үзгүлтүксүз, ал эми $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ болсо оң жактан үзгүлтүксүз дейбиз. Бирок берилген функция кайсы тараптан үзгүлтүксүз болгонуна карабастан, x_0 чекитиндеги предели жашабайт, анткени ал бирөө гана болуп, (8.6) шартын канааттандырышы керек эле. Ал аткарылбаган соң, берилген функция бул чекитте үзүлүшкө ээ болуп, $f(x)$ функциясы x_0 чекити аркылуу өткөндө чектүү секирик мүнөздөгү үзүлүшкө ээ болот дейбиз. Чектүү секирик чоңдугун l десек, анда ал

$l = |f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ санына барабар болот.

Мисалы $f(x) = \frac{2}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ функциясы $f(0) = 0$ маанисине ээ, бирок $x_0 = 0$ чекитинде сол жактан $f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = 2$ пределине, ал эми оң жактан

$f(x_0+0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = 0$ пределине ээ болгондуктан, функциянын бул чекиттеги үзүлүү секириги

$l = |f(x_0+0) - f(x_0-0)| = |0-2| = 2$ санына барабар (8.6 – чийме).



8.6-чийме

Көп өзгөрүлмөлүү функция

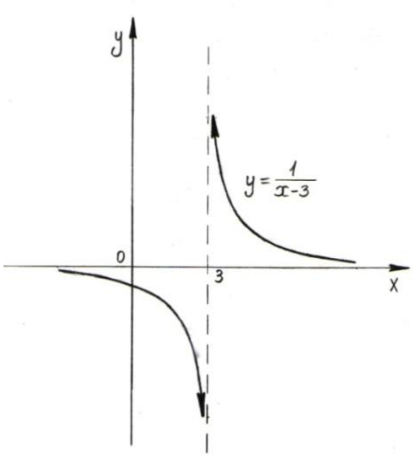
$x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ чекитинде үзүлүүгө дуушар болгону менен, анын бул чекитте кайсы бир багыттар боюнча чектүү пределдери табылып, алар функциянын $f(x_1^0,\ x_2^0,\ \dots, x_n^0)$ маанисине барабар болуп, ошол багыттар боюнча функция үзгүлтүксүз боло бериши мүмкүн. Үзүлүү секириги деп, функциянын $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ чекитиндеги бардык багыттар боюнча пределдеринин айырмасын эң чоңун алууга болот

$$l = \max_{1\le i\le n}\{|f(x_i+0) - f(x_i-0)|\}.$$

3^0. Каралган 1^0, 2^0 учурлардагы x_0 чекитиндеги чектүү секирик же тешикче, жарака көрүнүштөгү үзүлүү чекиттерин, **I – роддогу (түрдөгү)** же чектүү үзүлүү чекиттери деп айтабыз. Бул эки учурда тең функциянын x_0 чекитиндеги оң жана сол жактуу ар башка чектүү пределдери жашайт. Ал эми көп өзгөрүлмөлүү функциялар $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \dots; x_n^0\}$ чекитинде **I – роддогу (түрдөгү)** үзүлүшкө ээ болгондо, алардын бардык багыттар боюнча (ар түрдүү болсо да) чектүү пределдери жашашы керек.

4^0 Эгерде $f(x_0+0), f(x_0-0)$ бир жактуу пределдеринин жок эле дегенде бирөөсү "∞" пределине ээ болсо, анда x_0 үзүлүү чекиттерин **II -роддогу (түрдөгү)** же чектелбеген үзүлүү чекиттери деп айтабыз.

Мисалы $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x \neq 3 болсо, \\ 2, & x = 3\ болсо \end{cases}$ функциясы $x_0 = 3$ чекитинде аныкталып, $f(x_0)$=$f(3) = 2$ маанисине ээ болгону менен, бир жактуу пределдери $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$ чектелбегендиктен, II- түрдөгү үзүлүшкө дуушар болушат (8.7 – чийме).



8.7-чийме

Эгерде$f(x)$функциясы $]a,\ b[$ интервалын (ачык көптүгүн) ар бир чекитинде үзгүлтүксүз болуп, кесиндилердин учтарындагы a чекитинде оң жактан, ал эми b чекитинде сол жактан үзгүлтүсүз болсо, анда $f(x)$ ти X = $[a,\ b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) үзгүлтүксүз функция деп айтабыз. X = $[a,\ b]$ сегментиндеги бардык үзгүлтүксүз функциялардын көптүгүн C$[a,\ b]$ деп белгилейбиз.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын $x_0 = \{x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots; x_n^0\}$ чекитиндеги предели, ар бир координаталардын (өзгөрүлмөлөрдүн) пределдеринен жана умтулуу багыттарынан көз каранды болгондуктан, бир эле өзгөрүлмөнүн кайсы бир багыт боюнча чектүү предели жашабаса, анда функцияны бул чекитте II - түрдөгү үзүлүшкө ээ дейбиз. Ошондуктан көп өзгөрүлмөлүү функциялар II - түрдөгү үзүлүү чекиттерине гана эмес, II - түрдөгү үзүлүү түздөрүнө жана ийрилерине ээ болушу мүмкүн. Мисалы $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы бир гана $M_0(0;\ 0)$ чекитинде II - түрдөгү үзүлүшкө ээ болсо, $f(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$ функциясы бөлчөктүн бөлүмү $x^2 - y^2 = 0$ болгон чекиттерде же $y = x$ жана $y = -x$ түздөрүндө II - түрдөгү үзүлүшкө ээ болот.

Эгерде көп өзгөрүлмөлүү функция D туюк көптүгүн ($D \subseteq R^n$) ар бир $x = \{x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n\}$ чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда аны бүтүндөй D туюк көптүгүндө үзгүлтүксүз деп айтып, мындай D туюк көптүгүндө үзгүлтүксүз болгон бардык функциялардын көптүгүн $\mathrm{C}[D]$ символу менен белгилейбиз.

8.1.5 Татаал функциянын үзгүлтүксүздүгү

Айталы, сандык октун чекиттеринин кайсы бир Е көптүгүндө $u = \varphi(x)$ функциясы берилип, x аргументтери Е көптүгүндө өзгөргөн кезде функциянын тиешелүү u маанилери E_1 көптүгүн түзсүн дейли. Анда E_1 көптүгүндө башка бир $y = \mathrm{f}(u)$ функциясын түзүүгө болот. Ошентип ар бир $x \in \mathrm{E}$ саны $u \in \mathrm{E}_1$ санына, ал эми бул $u \in \mathrm{E}_1$ саны, өз кезегинде y санына тиешелеш коюлуп, жыйынтыгында Е көптүгүндө

$y = \mathrm{f}(u) = \mathrm{f}(\varphi(x))$ татаал функциясы берилген болот.

- **8.2 Теорема**. *Эгерде* $u = \varphi(x)$ *функциясы* x_0 *чекитинде А санына барабар болгон пределге ээ болсо жана* $y = \mathrm{f}(u)$ *функциясы* $u = \mathrm{A}$ *чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда* $y = \mathrm{f}(\varphi(x))$ *татаал функциясын* x_0 *чекитиндеги предели* $\mathrm{f}(\mathrm{A})$ *санына барабар болот.*

Далилдөө.► $\mathrm{f}(u)$ функциясы $u = \mathrm{A}$ чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, каалагандай жетишерлик кичине ε оң санын алсак да, ага ылайыкталаган жетишерлик кичине μ оң саны табылып,

$|u - \mathrm{A}| < \mu \ \Rightarrow |\mathrm{f}(u) - \mathrm{f}(\mathrm{A})| < \varepsilon$ шарты аткарылат. Экинчи жактан теореманын шартында айтылгандай, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \mathrm{A}$ предели жашагандыктан, кандай гана μ жетишерлик кичине оң санын албайлы, ага ылайыкталган жетишерлик кичине δ оң саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ шарты аткарылар замат, $|u - \mathrm{A}| = |\varphi(x) - \mathrm{A}| < \mu$ болушу келип чыгат. Жыйынтыктап айтканда алынган $\varepsilon > 0$ санына ылайыкталган $\delta > 0$ саны табылып, $|x - x_0| < \delta$ болору менен

$|\mathrm{f}(u) - \mathrm{f}(\mathrm{A})| = \left|\left|\mathrm{f}\big(\varphi(x)\big) - \mathrm{f}(\mathrm{A})\right|\right| < \varepsilon$ шарты аткарылып, функциянын чекиттеги предели 6.8 – аныктамасы боюнча $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f}\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{f}(\mathrm{A})$ көрүнүштө табылып, теорема далилденген болот. ◄

Ошентип $u = \varphi(x)$ функциясы x_0 чекитинде, ал эми $y = \mathrm{f}(u)$ функциясы $u_0 = \varphi(x_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда $y = \mathrm{f}(\varphi(x))$ татаал функциясын, x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция болору келип чыгып,

$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{f}\big(\varphi(x)\big) = \mathrm{f}(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)) \qquad (8.7)$$

үзгүлтүксүз функциянын белгисинин алдынан пределге өтүү эрежеси табылат.

Мисалдар:

1) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = log_a e}$ сонун предели $\left(\frac{0}{0}\right.$ аныксыздыгы$\left.\right)$. (8.8)

►Предел алдындагы функцияга логарифмдин касиетин колдонсок

$y = \frac{log_a(1+x)}{x} = \{log_a(1+x)\}^{\frac{1}{x}}$ $(a > 0, a \neq 1)$ көрүнүшкө келет, анын $y = log_a u$ жана $u = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ функцияларынан турган татаал функция экендигин байкайбыз. Логарифмалык функциянын үзгүлтүксүздүгүнөн жана экинчи сонун пределди эске алып, (8.7) эрежесинин негизинде

$\lim_{x\to 0}\frac{log_a(1+x)}{x} = log_a\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = log_a e = \log_e e = \ln e = 1$ далилдөөсүнө ээ болобуз. **(**8.8) - формуланы $a = e$ болгондо, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ көрүнүштө жазышат. ◄

2) $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a}$ сонун предели $\left(\frac{0}{0}\right.$ аныксыздыгы$\left.\right)$. (8.9)

► Мында $a > 0,\ a \neq 1$ болот. $a^x - 1 = \tau$ белгилөөсүн киргизсек $x \to 0 \Leftrightarrow \tau \to 0$ болуп, $a^x = 1 + \tau,\ x = \frac{\ln(1+\tau)}{\ln a}$ белгилөөлөрүн ордуна коюп, берилген пределди (8.7) ни эске алуу менен

$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{\tau\to 0}\frac{\tau}{\frac{\ln(1+\tau)}{\ln a}} = \ln a \cdot \frac{1}{\lim_{\tau\to 0}\frac{\ln(1+\tau)}{\tau}} = \ln a$ көрүнүштө эсептей алабыз.

$a = e$ болгондо, (8.9) формуласы $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ көрүнүшкө келет.◄

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ сонун пределин $\mu\in Q$ болгондо $\left(\frac{0}{0}\text{ аныксыздыгы}\right)$ далилденген ((6.30) формуласын караңыз). $\mu\in R$ болгондо,

► $(1+x)^{\mu}-1=y$ белгилөөсүн киргизип, $(1+x)^{\mu}=1+y$ же логарифмдеп, келип чыккан

$\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$ же $\frac{\mu\ln(1+x)}{\ln(1+y)}=1$ теңдештиктерин пайдаланып,

$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{y}{x}=\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\mu\ln(1+x)}{x}$ келип чыгарын көрөбүз. Белгилөөдөн кийинки келип чыккан функциялар өз аныкталуу областтарында y жана x өзгөрүлмөлөрүнө карата үзгүлтүксүз болушкандыктан, ошол областтардын чегинде $x\to 0\Leftrightarrow y\to 0$ теңдеш болуп,

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x}=1\cdot\mu\cdot 1=\mu$ пределин табабыз. ◄

4) $\varphi(x),\ \psi(x),\ \alpha(x)$ үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда

$$1^{\infty}-\text{аныксыздыктарына: }\lim_{\boldsymbol{\varphi(x)\to 0}}(\mathbf{1}+\boldsymbol{\varphi}(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\boldsymbol{e},$$

$$\lim_{\boldsymbol{\psi(x)\to\infty}}\left(\mathbf{1}+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\psi(x)}}\right)^{\boldsymbol{\psi(x)}}=\boldsymbol{e}.$$

5) $\frac{0}{0}$ аныксыздыктарына: $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=\log_a e$,

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\ln(1+\alpha(x))}{\alpha(x)}=1\,,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{a^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=\ln a\,,$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{e^{\alpha(x)}-1}{\alpha(x)}=1\,,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{(1+\alpha(x))^{\mu}-1}{\alpha(x)}=\mu\,,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\,,\qquad \textbf{(8.9*)}$$

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\,,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\,,\quad \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$$

сонун пределдеринин туура болорун (8.7) ден келтирип чыгарууга болот. Демек $x_0=0$ чекитинде $\alpha(x)$ чексиз кичине функциясы үзгүлтүксүз болсо, анда бул чекиттин чексиз кичине чеке белинде

$\log_a(1+\alpha(x))\sim k\cdot\alpha(x),\ k=\log_a e$; $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$;

$$\boldsymbol{a}^{\alpha(x)} - \mathbf{1} \sim \mathbf{ln}\boldsymbol{a} \cdot \alpha(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{e}^{\alpha(x)} - \mathbf{1} \sim \alpha(\boldsymbol{x}); \ (\mathbf{1} + \alpha(\boldsymbol{x}))^{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{1} \sim \boldsymbol{\mu}\alpha(\boldsymbol{x}); \qquad \mathbf{(8.10)}$$

$$\mathbf{sin}\,\alpha(\boldsymbol{x}) \sim \alpha(\boldsymbol{x}); \ \mathbf{tg}\,\alpha(\boldsymbol{x}) \sim \alpha(\boldsymbol{x}); \ \boldsymbol{arcsin}\alpha(\boldsymbol{x}) \sim \alpha(\boldsymbol{x}); \ \boldsymbol{arc}\mathbf{tg}\alpha(\boldsymbol{x}) \sim \alpha(\boldsymbol{x})$$

функцияларынын өз ара эквиваленттүүлүгүн көрөбүз. Мындан алардын үзгүлтүксүздүгүн эске алып, $x \to 0$ умтулгандагы пределдерин эсептөөдө, эквиваленттүү чоңдуктар катарында бири - бири менен алмаштырып жазуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз.

- Айрым $x \to x_0$ умтулганда $u(x) \to 1$ умтулса жана $v(x) \to \infty$ умтулса, анда $[u(x)]^{v(x)}$ тин пределинен келип чыгуучу 1^{∞} аныксыздыгын логарифмдик предел деп аталуучу ыкма менен эсептейбиз: $u(x), v(x)$ функциялары каралуучу аралыкта үзгүлтүксүз жана логарифмалык функциянын жашоо шарттарын канааттандырсын дейли. Бул учурда u^v туюнтмасына логарифмдин касиетин пайдаланып, $u^v = e^{v \ln u}$ көрүнүшүнө өзгөртө алабыз. Эгерде

$\lim\limits_{x \to x_0} v \ln u = \mathrm{A}$ чектүү предели табылса, анда предел алуунун

$$\lim_{x \to x_0} [u(x)]^{v(x)} = \lim_{x \to x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x \to x_0} [v(x) \ln u(x)]} = e^{\mathrm{A}} \qquad (8.10^*)$$

логарифмдик эрежесин колдонууга болот. (8.10*) формуласын колдонууда $\ln\big(1 + \alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$ салыштыруусун пайдаланууга да болот. Чынында эле $x \to x_0$ умтулганда $u(x) \to 1$ болгондуктан, $(u - 1) = \alpha(x)$ чексиз кичине функция болуп, $\ln u = \ln[1 + (u - 1)] \sim (u - 1)$ келип чыгат. Андай болсо берилген пределди $\lim\limits_{x \to x_0} v \ln u = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\ln u}{\frac{1}{v}} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(u-1)}{\frac{1}{v}} = \lim\limits_{x \to x_0} v(u - 1)$ пределине өзгөртүп түзүүгө болот. Мисалы

$$\lim_{x \to 0} (cosx)^{\frac{1}{x^2}} (1^{\infty}) = \left| \begin{matrix} u = cosx \\ v = \dfrac{1}{x^2} \end{matrix} \right| = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{-2sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Ошентип функциянын үзгүлтүксүздүгү, анын пределдерин эсептөө ыкмаларын кеңейтип, жаңы сонун пределдерди колдонууга шарт түзөт.
Мисалдар:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1 + x^2)} \left(\frac{0}{0}\right) = |\ln(1 + x^2) \sim x^2| = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$

$$= \left|\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}\right| = \lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}(1^\infty) = \lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}} = \left|\begin{matrix}\alpha(x) = \operatorname{tg}x \\ x\to 0 \Leftrightarrow \alpha(x)\to 0\end{matrix}\right| =$

$= \lim\limits_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin x)}{3^{\operatorname{tg}x}-1}\left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}\ln(1-\sin x) \sim -\sin x \\ 3^{\operatorname{tg}x}-1 \sim \ln 3\cdot\operatorname{tg}x\end{matrix}\right| = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\ln 3\cdot\operatorname{tg}x} =$

$= -\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{\ln 3} = -\frac{1}{\ln 3}.$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}(1^\infty) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg}x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{x}}}{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}} = \frac{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}}}{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}} = \frac{e^1}{e^1} = 1.$

д) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x^3-3}{x-e}\left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}y = x-e \Rightarrow x = y+e \\ x\to e \Leftrightarrow y\to 0\end{matrix}\right| = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(y+e)^3-3}{y} =$

$= \lim\limits_{y\to 0}\frac{3(\ln(y+e)-1)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{3(\ln(y+e)-\ln e)}{y} = 3\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\frac{y}{e}\cdot e} = \frac{3}{e}\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{y}{e}\right)}{\frac{y}{e}} = \frac{3}{e}.$

е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}\left(\frac{0}{0}\right) = \left|\begin{matrix}x-\frac{\pi}{4} = y \Rightarrow x = y+\frac{\pi}{4} \\ x\to\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow y\to 0 \\ 2\sin^2 x-1 = -\cos 2x \\ \operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y} \\ \sin 2y \sim 2y,\ \operatorname{tg}y \sim y\end{matrix}\right| = \lim\limits_{y\to 0}\frac{\left(\frac{1+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}y}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{-\cos\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)} =$

$= \lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+\operatorname{tg}y)^{\frac{1}{3}}-(1-\operatorname{tg}y)^{\frac{1}{3}}-1}{\sin 2y\cdot(1-\operatorname{tg}y)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{y\to 0}\left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{3}}-1}{y}\cdot\frac{1}{(1-y)^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{y}\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\infty\right) =$
$-\infty.$

§8.2 Аралыктарда үзгүлтүксүз функциялардын касиеттери

$X = [a,\ b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) аныкталып үзгүлтүксүз болгон бардык функциялардын көптүгүн $C[X]$ же $C[a,\ b]$ деп белгилегенбиз. Бул көптүктүн элементтери болгон, $[a,\ b]$ сегментиндеги үзгүлтүксүз функцияларга жалпы тиешелүү болгон айрым касиеттерге токтолобуз.

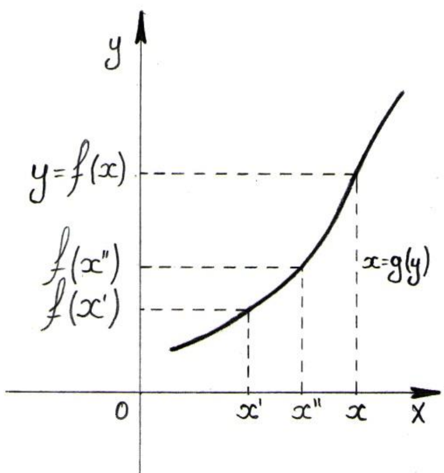
8.2.1 Монотондуу функциянын үзгүлтүксүздүгү

- X = $[a,\ b]$ аралыгында монотондуу өсүүчү (кемүүчү) функциялар I – түрдөгү (чектелген) гана үзүлүү чекиттерине ээ болушу мүмкүн.

► Чынында $f(x)$ монотондуу өсүүчү болуп, x_0 чекитинде үзүлүшкө ээ болсун деп ойлойлу. Аныктык үчүн x_0 чекитин аралыктын сол учундагы эң акыркы чекит болбосун дейли. Анда анын сол жагында жайгашкан чекиттер үчүн $x < x_0 \ \Rightarrow \ f(x) \le f(x_0)$ шарты аткарылгандыктан, монотондуу функциянын x_0 чекитиндеги сол жактуу $f(x_0 - 0)$ чектүү предели жашап (7.1.3, 5^0 – караңыз), ал $f(x_0)$ санынан ашып кете албайт. Демек

$\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0 - 0) \le f(x_0)$ келип чыгып, $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ болсо $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде сол жактан үзгүлтүксүз болуп, сол жактуу секириги $l_{\text{сол}} = |f(x_0 - 0) - f(x_0)| = 0$, ал эми

$f(x_0 - 0) < f(x_0)$ болсо, чектүү сандардын айырмасы катарында $l_{\text{сол}} = |f(x_0 - 0) - f(x_0)| = h < +\infty$ чектүү сан болот.



8.8-чийме

Экинчи жактан x_0 үзүлүү чекитин аралыктын оң учундагы эң акыркы чекит эмес болсун деп алып, функциянын x_0 чекитиндеги оң жактуу

$l_{\text{оң}} = |f(x_0 + 0) - f(x_0)|$ секириги да чектүү сан болорун көрөбүз. Андай болсо монотондуу функциянын x_0 үзүлүү чекитиндеги секириги

$l = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)|$ чектүү сан болору же x_0 чекитинин I – түрдөгү үзүлүү чекити болору далилденген болот.◄

Мындан $y = f(x)$ монотондуу жана $f(x) \in \mathrm{C}[a,\ b]$ болсо, анда үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясынын маанилери кандайдыр бир Y$= [c,\ d]$ сегментин түзүп, бул аралыкты жыш толтурат, б.а. чыныгы сандардын $[c,\ d]$ аралыгында $f(x)$ функциясынын маанилеринен башка бир да чекит болбойт деген жыйынтык чыгарабыз.

Ошондой эле D туюк көптүгүндө ($x \in D \subseteq R^n$) аныкталган $y = f(x)$ функциясы $f(x) \in \mathrm{C}[D]$ жана монотондуу болсо, анда үзгүлтүксүз $f(x)$ функциясынын маанилери R чыныгы сандарынын көптүгүндөгү кандайдыр бир Y$= [c,\ d]$ сегментин түзүп, аны жыш толтурат. Демек үзгүлтүксүз жана монотондуу функциялар биринчиден, кайсы бир туюк көптүктөгү кубулуштарды толугу менен, кайсы бир туюк аралыкка чагылтуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болуп, бул аралыкта ошол кубулуштардын элестеринен башка бир да чекит жайгашпайт.

Экинчиден $[a,\ b] \leftrightarrow [c,\ d]$ аралыктарын бири – бирине өз ара бир маанилүү чагылтат, анткени ал, бул аралыкта монотондуу болгондуктан ар башка x терге, ар башка y тер тиешелеш коюлат (8.8 – чийме). Эгерде эки башка x', x'' терге бир эле y тиешелеш коюлуп калса, анда функция монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болбой $x' < x''$ чекиттеринде функция турактуу $f(x') = f(x'')$ болуп, монотондуулук шарты бузулат.

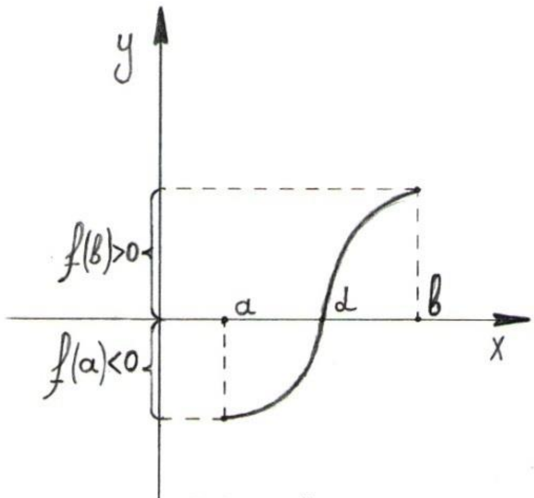
Натыйжа: *Туюк көптүктө аныкталып, үзгүлтүксүз жана монотондуу өсүүчү (кемүүчү)* $f(x)$ *функциясына сөзсүз бир маанилүү тескери* $y = f^{-1}(x)$ *функциясы жашап, ал да монотондуу өсүүчү (кемүүчү) үзгүлтүксүз функция болот.*

8.2.2 Функциянын аралыктардагы маанилери жөнүндөгү Больцано – Кошинин теоремалары

8.3 Теорема (1 - теоремасы). *Эгерде* $f(x)$ *функциясы* $[a,\ b]$ *(туюк) аралыгында үзгүлтүксүз болуп* ($f(x) \in \mathrm{C}[a,\ b]$), *аралыктын учтарында карама – каршы белгилердеги маанилерге ээ болсо, анда* $f(x)$ *функциясы* $]a,\ b[$ *интервалынын жок дегенде бир* α *(альфа) чекитинде нөл санына барабар мааниге ээ болот.*

Далилдөө.► Айталы $f(x)$ функциясы аралыктардын учтарында карама – каршы белгидеги маанилерге ээ болсун. Аныктык үчүн

$f(a) < 0$ жана $f(b) > 0$ деп эсептейли. $[a,\ b]$ аралыгын тең экиге бөлөлү. Бөлүү чекити $\xi = \frac{a+b}{2}$ болсун дейли. Эгерде $f(\xi) = \mathrm{f}\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ болсо, изделүүчү $\alpha = \frac{a+b}{2}$ чекити табылып, теорема далилденген болот. Ал эми $f(\xi) \neq 0$ болсо, анда тең экиге бөлүнгөн аралыктардын биринин учтарында $f(x)$ карама – каршы белгидеги маанилерди кабыл алууга тийиш. Ошол $f(a_1) < 0$, $f(\ b_1) > 0$ болгон аралыкты $[a_1,\ b_1]$ деп белгилейли. Аны да тең экиге бөлүп, бөлүү чекитин $\xi_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ деп белгилейли. Эгерде $f(\xi_1) = \mathrm{f}\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$ болсо теорема далилденет. Ал эми $f(\xi_1) \neq 0$, анда аралыктардын учтарынын биринде $f(x)$ функциясы карама - каршы белгидеги маанилерди кабыл алган болот. Ошол $f(a_2) < 0$, $f(\ b_2) > 0$ аралыкты $[a_2,\ b_2]$ деп алып, аны да тең экиге бөлөбүз. Бөлүү чекитинде $f(\xi_2) = \mathrm{f}\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) \neq 0$ болсо, анда мындай тең экиге бөлүү процесстерин уланта беребиз. Натыйжада узундуктары



8.9-чийме

$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ нөлгө умтулуучу бири - бирине кийиштирилген аралыктын учтарында, функция карама – каршы белгилерге ээ болгон

$[a,\ b] \supset [a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset\ \ldots\ \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots\ \to 0$ сегменттерин системасы курулат. Эгерде бөлүү процесстерин бирөөсүндө эле, ξ_n бөлүү чекитинде функциянын мааниси $f(\xi_n) = 0$ болуп калса, теорема далилденип, бөлүү процесси токтотулат, б.а. $[a,\ b]$ аралыгынан $f(x)$ нөлгө айлануучу жок дегенде бир $\alpha = \frac{a_n+b_n}{2}$ чекити табылган болот. Эгерде мындай чекит табылбаса, анда бөлүү процессин чексизге чейин улантып, $\lim\limits_{n\to\infty}(\ b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$

пределине таянып, функция нөлгө айлануучу чекит деп, чексиз сандагы кийиштирилген сегменттердин баарына таандык болгон α чекитин алууга болот. Эгерде $f(\alpha) \neq 0$, б.а. оң же терс болот деп тескерисинче ойлоп, α чекитинин чеке белине $[a_n, b_n]$ сегменти толук бата тургандай δ −аймакчасын түзүү үчүн, $\delta > 0$ санын жана бөлүүлөрдүн n иретин тандасак, анда $f(x)$ функциясы α чекитинде ($\alpha \in [a, b]$) үзгүлтүксүз болгондуктан, тандалган δ менен n ге карата түзүлгөн α чекитин жакынкы δ −аймакчасында жана анын ичиндеги a_n, b_n чекиттеринде $f(x)$ функциясы $f(\alpha)$ нын белгисиндей туруктуу, дайыма оң же терс бир белгини сактап калышы керек эле. Бирок $[a_n, b_n]$ сегменттеринин түзүлүү принцибине ылайык, анын учтарында $f(x)$ карама – каршы белгидеги $f(a_n) < 0$ жана $f(b_n) > 0$ маанилерине ээ. Ошентип бир эле мезгилде $f(a_n)$ менен $f(b_n)$ маанилеринин белгилери бирдей жана карама - каршы деген эки каршылаш пикир келип чыгат. Мындай карама - каршылык $f(\alpha) \neq 0$ болот деп ойлогонубуздун ката экендигин көрсөтүп, чынында эле $a < \alpha < b$ шартын канааттандыруучу α чекити табылып, $f(\alpha) = 0$ болорун далилдейт. ◄

Бул теорема геометриялык жактан $f(x) \in C[a, b]$ болуп, аралыктын учтарында карама – каршы $f(a) < 0, f(b) > 0$ сыяктуу белгидеги маанилерге ээ болсо, анда a жана b сандарынын арасынан жок дегенде бир α саны табылып, $f(x)$ функциясынын графиги Ox огун, ошол $x = \alpha$ чекитинде кесип өтөт дегенди түшүндүрөт (8.9 - чийме).

Үзгүлтүксүз функциялардын мындай касиети, айрым теңдемелердин кайсы бир аралыктагы чечимдерин табылар – табылбасын болжолдоого мүмкүнчүлүк түзөт. Айрыкча так даражалуу, коэффициенттери чыныгы сандар болгон көп мүчөлөрдүн нөл болуучу чекиттерин (нөлдөрүн) табууда кеңири колдонулат.

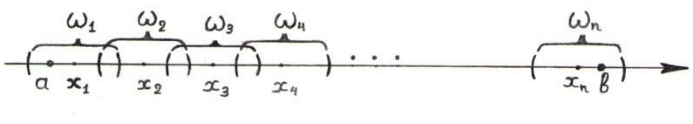
Мисалы $P_3(x) = x^3 + x - 1$ көп мүчөсү $[0, 1]$ – аралыгында жок дегенде бир чекитте нөлгө айланарын көрсөтөлү. Берилген көп мүчө функция катарында, биринчиден $[0, 1]$ аралыгында үзгүлтүксүз, экинчиден аралыктын учтарында $P_3(0) = -1 < 0$, $P_3(1) = 1 > 0$ карама каршы белгидеги маанилерди кабыл алат. Анда Больцано – Кошинин 1 – теоремасы боюнча бул аралыкта сөзсүз $P_3(\alpha) = 0$ боло тургандай жок дегенде бир $x = \alpha$ чекити табылууга тийиш. Чынында эле бул аралыкты тең экиге бөлсөк, бөлүү чекити $\xi = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ болуп, бөлүнгөн аралыктардын экинчи жарымын учтарында көп мүчө

$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$, $P_3(1) = 1 > 0$ карама – каршы белгилерге ээ болуп, көп мүчөнүн нөлү ушул аралыкта болушу мүмкүн деп түшүнөбүз. Демек $[a_1,\ b_1] = \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$ деп алып, аны да тең экиге бөлөбүз. Бөлүү чекити $\xi_1 = \frac{3}{4}$ болуп, көп мүчөнүн нөлү $[a_2,\ b_2] = \left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right]$ аралыгында гана болуусу мүмкүн, анткени көп мүчө анын учтарында гана

$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8} < 0$, $P_3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{64} > 0$ карама – каршы белгидеги маанилерди кабыл алат. Мындай процессти өзүбүзгө зарыл болгон абалга чейин улантуу менен, $P_3(x) \equiv x^3 + x - 1 = 0$ теңдемесинин керектүү тактыктагы чечимин (көп мүчөнүн нөлүн) таба алабыз.

Эскертүү: Теореманы далилдөөдө колдонулган аралыктарды бөлүү ыкмасы, бири – бирине кийиштирилген кесиндилер (сегменттер) принциби деп аталып, математикалык бүтүмдөрдү далилдөөдө кеңири колдонулат. Ушундай эле максаттарда $[a,\ b]$ сегментин толук толтуруп же каптап туруучу ω_i интервалдарын чектүү же чексиз сандагы суммаларынан турган $[a,\ b] \supseteq \sum \omega_i$ системасын колдонууга болот (8.10 - чийме). Бул учурда $\forall x_i \in [a,\ b],\ \exists \omega_i \in \sum \omega_i\ \wedge\ x \in \omega_i$ аткарылып, Борелдин леммасы орун алат.

Лемма. *Эгерде D чектелген туюк көптүгүн, ω_i ачык көптүктөрдүн чексиз сандагы $\sum \omega_i$ системасы толук кармап же камтып турса, анда бул чексиз системанын ичинен D көптүгүн толук камтый ала тургандай, чектүү сандагы $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n\}$ системачасын бөлүп алууга болот.*



8.10-чийме

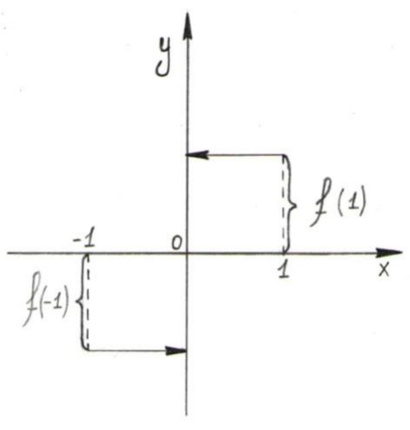
Бул лемманы пайдаланып, үзгүлтүксүз функциялар жөнүндөгү Больцано – Кошинин, Вейерштрасстын, Кантордун теоремаларын башка варианттарда далилдөөгө болорун байкоого болот.

8.4 Теорема (2 – теоремасы). *Айталы $f(x) \in C[a,\ b]$ болуп, аралыктын учтарында $f(a) = A$, $f(b) = B$ барабар эмес маанилерди кабыл алсын, анда алардын арасында жайгашкан каалаган C чекити*

$(\text{A} < \text{C} < \text{B})$ *үчүн,* $]a,\ b[$ *интервалынан жок дегенде бир* α *чекити* $(a < \alpha < b)$ *табылып,* $f(\alpha)$ =С *болот.*

Далилдөө.► Аныктык үчүн $\text{A} < \text{B}$ деп алалы. Жогоруда далилденген 1 – теореманы колдонуу үчүн, аралыктардын учтарында карама – каршы белгидеги маанилерге ээ болгон, $\varphi(x) = f(x) -$ С жардамчы функциясын ойлоп табабыз. Чынында эле, $\varphi(x)$ функциясы $[a,\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функциялардын айырмасы катарында үзгүлтүксүз жана аралыктын учтарында $\varphi(a) = f(a)$ −С = А – С < 0, $\varphi(b) = f(b)$ −С > 0 карама – каршы белгидеги маанилерге ээ болот, анда Больцано – Кошинин 1 – теоремасы боюнча $]a,\ b[$ интервалынан жок дегенде бир α чекити табылып, $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ −С = 0 шарты аткарылат. Мындан $f(\alpha) =$ С келип чыгып,]А, В[интервалындагы каалагандай С чекити, сөзсүз түрдө $f(x)$ функциясын $]a,\ b[$ интервалын кайсы бир (же бир канча) α чекитиндеги функциянын мааниси болору далилденген болот.◄

Ошентип $[a,\ b]$ туюк көптүгүндө үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясын маанилери, кандайдыр бир [А, В] туюк көптүгүн түзөт жана аны жыш толтурат, б.а. [А, В] аралыгында $f(x)$ функциясын маанилеринен башка бир да чекит жайгаша албайт.



8.11-чийме

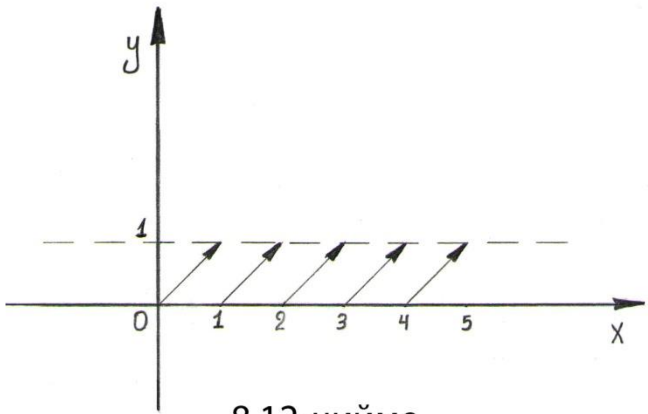
Эскертүү: Теореманын орун алышы үчүн $f(x)$ *функциясын* $[a,\ b]$ *аралыгында үзгүлтүксүз болушу, негизги шарт болуп эсептелет. Мисалы*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$ *функциясы,* $[-1,\ 1]$ *арлыгынын учтарында*

карама - каршы маанилерге ээ болгону менен, бул аралыктан $f(\alpha) = 0$ *боло тургандай* α *чекити табылбайт (8.11– чийме). Анткени функция аралыктагы* $x_0 = 0$ *чекитинде үзүлгөн.*

$8.2.3$ Үзгүлтүксүз функциялардын чектелгендиги жөнүндөгү Вейерштрасстын теоремасы

$f(x)$ функциясы кайсы бир сандык көптүктө аныкталып, чектелген маанилерди кабыл алганы менен, бул аралыкта эң чоң жана эң кичине маанилерге ээ болбой калышы да мүмкүн. Бул учурда сөз кылынган аралыктагы чекиттерде, функция өзүнүн накта жогорку $sup\{f(x)\}$, накта төмөнкү $inf\{f(x)\}$ чектерине, жете албайт. Мисалы $[0,\ 5]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) үзүлүү чекиттерине ээ болгон,



8.12-чийме

$y = x - \text{E}(x) = \{x\}$ – *сандын бөлчөк бөлүгү* функциясы

$0 \leq x - \text{E}(x) < 1$ чектелген экендигине карабай, бул аралыкта $sup\{f(x)\}=1$ накта жогорку чегине жете албайт, анткени сандын бөлчөк бөлүгү эч качан 1 санына барабар боло албайт. Ал эми 1 санынан кичине болгон, ага биринчи кошуна бөлчөк санды көрсөтө албайбыз (R жылчыксыз көптүк). Ошондуктан функциянын бул аралыкта эң чоң мааниси жок же табылбайт (8.12 – чийме).

8.5 Теорема. (Вейерштрасстын теоремасы)*Эгерде $f(x)$ функциясы D чектелген туюк көптүгүндө ($D \subseteq R^n$) үзгүлтүксүз функция болсо*

$(f(x) \in \text{C}[D])$, *анда*

1) $f(x)$ *функциясы сөзсүз $x \in D$ көптүгүндө чектелген болот.*

2) $f(x)$ *функциясы сөзсүз $x \in D$ көптүгүндө, өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине ээ болот.*

1) – бөлүгүн далилдөө: ►Далилдөөнү $D \subseteq R$ бир ченемдүү $D = [a,\ b]$ сегменти (туюк көптүгү) үчүн жүргүзөлү. Айталы, тескерисинче $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы $[a,\ b]$ сегментинде чектелбеген болсун деп болжолдойлу, анда кандай чоңдуктагы n натуралдык санын албайлы $[a,\ b]$ сегментинен x_n сыяктуу чекиттер табылып, функциянын бул чекиттердеги маанилери n санынан $f(x_n) \geq n$ ашып кетет. $\forall n \in$

$N: a \le x_n \le b$ болгондуктан, $\{x_n\}$ чектелген удаалаштык болуп, өзү пределге ээ болбосо да, анын мүчөлөрүнүн арасынан чектүү x_0 пределине ($a \le x_0 \le b$) ээ болуучу курама $\{x_{n_k}\}$ жекече удаалаштыгын бөлүп алууга болот (1 – бөлүк, 1.1.5, Больцано – Вейерштрасстын леммасы). $f(x)$ функциясы берилген аралыкта үзгүлтүксүз болгондуктан, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ чектүү пределине ээ болушу керек. Бирок $\{x_{n_k}\}$ удаалаштыгын түзүлүү табияты боюнча, n_k чоңойгон сайын $f(x_{n_k})$ чоңойуп кете бергендиктен ($f(x_{n_k}) \ge n_k$),

$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$ пределине ээ болушу керек эле. Келип чыккан мындай карама – каршылык берилген сегментте (туюк аралыкта) $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы чектелген эмес деген тескери болжолубуздун туура эмес экендигин көрсөтүп, теореманын 1) – бөлүгү далилденген болот.

Теореманын 2) – бөлүгүн далилдейли (эң чоң маани үчүн): Теореманын далилденген бөлүгүнө ылайык, $f(x) \in C[a, b]$ болсо, анда бул аралыкта чектелген функция болот. Эгерде анын жогорку чектеринин эң кичинеси же накта жогорку чеги $sup\{f(x)\} = M$ чектүү саны табылса, функция бул аралыкта эң чоң маанисине жетип, теорема далилденип бүтөт. Ал эми тескерисинче $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы бул мааниге $[a, b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) жетпей, анын сыртында жетет деп ойлосок, анда сегменттин чекиттеринде $f(x) < M$ шарты гана аткарылат. Эгерде өзүбүзчө $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ жардамчы функциясын ойлоп киргизсек, анда бул кошумча функциянын бөлүмү нөлгө айланбайт жана үзгүлтүксүз функциялардын айырмасы менен катышы катарында $[a, b]$ сегментинде үзгүлтүксүз функция болот. Ошондуктан теореманын далилденген 1) – бөлүгүнө ылайык, $\varphi(x)$ функциясы бул аралыкта жогору жана төмөн жактарынан чектелген болууга тийиш, б.а. кандайдыр бир μ оң саны табылып, $\forall\, x \in [a, b]$: $\varphi(x) \le \mu$ (жогору жагынан чектелген абалга токтололу) болот. Мындан

$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)} \le \mu \quad \Rightarrow \ f(x) \le M - \frac{1}{\mu}$ келип чыгып, $f(x)$ функциясы $[a, b]$ аралыгында M маанисине жете албасын ырастайт. Андай болсо,

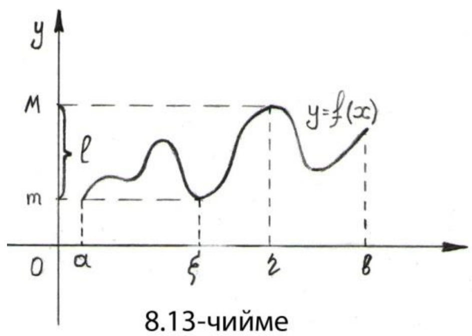
$\mathrm{M} - \frac{1}{\mu}$ саны $f(x)$ функциясынын накта жогорку чеги болуп калат. Бирок мындай болушу мүмкүн эмес, анткени тескери оюбузда $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ аралыгында М санына жетпеген маанилерди кабыл ала берет деп, $f(x) < \mathrm{M}$ шартына гана баш ийип, андан кичине

$\mathrm{M} - \frac{1}{\mu}$ санынан чоң болгон маанилерди кабыл ала берүүсүнө мүмкүнчүлүк калтырылган. Ошондуктан $\mathrm{M} - \frac{1}{\mu}$ санын накта жогорку $sup\{f(x)\}$ чек деп айта албайбыз. Бул карама - каршылык $f(x)$ үзгүлтүксүз функциясы М$= sup\{f(x)\}$ накта жогорку же эң чоң маанисине, $[a,\ b]$ сегментинде (туюк көптүгүндө) жетпей, сыртында жетет деген тескери оюбуздун туура эмес экендигин көрсөтүп, теорема толугу менен далилденген болот. ◄

Ушундай эле мазмундагы талкуулоолор менен теореманы жалпы $D \subseteq R^n$ туюк көптүгүндө далилдөөгө болот.

Ошентип $f(x) \in \mathrm{C}[a,\ b] \ \Rightarrow \exists\, m, M \in R$:

1). $[a,\ b]$ аралыгында $f(x)$ чектелген функция болот $m \le f(x) \le M$. Теореманын 2) – кортундусу боюнча $\inf\{f(x)\} = m = f(\xi)$ - бардык төмөнкү чектердин эң чоңу же накта төмөнкү чеги жана $sup\{f(x)\} = \mathrm{M} = f(\eta)$ - бардык жогорку чектердин эң кичинеси же накта жогорку чеги табылып, алар тиешелүү түрдө функциянын $[a,\ b]$ аралыгындагы эң кичине жана эң чоң маанилери болушат (8.13 – чийме), б.а. $[a,\ b]$ аралыгынан функция эң кичине жана эң чоң маанилерди кабыл ала турган ξ жана η чекиттери табылат. $l = |M - m|$ айырмасын функциянын ушул аралыктагы термелүүсү деп аташат.



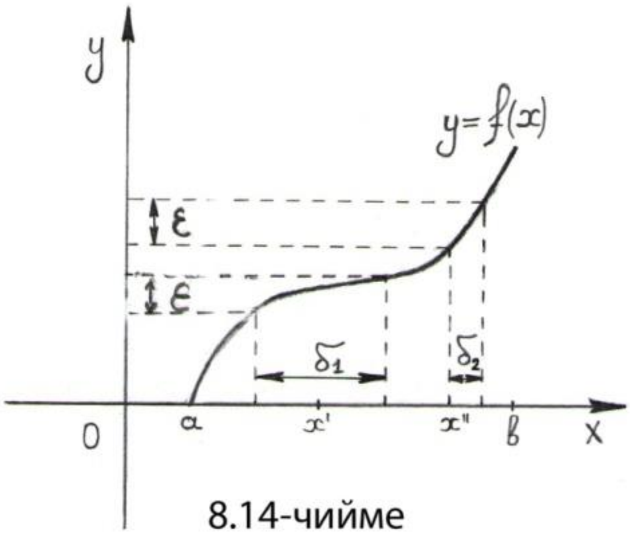
8.13-чийме

Жогоруда каралган $y = x - \mathrm{E}(x)$ функциясын $[0,\ 5]$ туюк көптүгүндө эң чоң мааниге ээ болбогондугун себеби, анын бул аралыктагы 0, 1, 2, 3, 4, 5 чекиттеринде I – түрдөгү үзүлүүгө ээ болгондугу менен түшүндүрөбүз. Ошондой эле Вейерштрасстын теоремалары туюк аралыктарда гана орун алат. Мисалы $y = x$ функциясы $]0,\ 1[$ интервалында (ачык көптүгүндө) үзгүлтүксүз болгону менен, бул аралыкта эң чоң жана эң кичине маанилерине жетпейт, анткени жогорку чектеринин эң кичинеси же накта төмөнкү чеги $sup\{f(x)\} = 1$, ал эми төмөнкү чектерин эң чоңу же накта төмөнкү чеги $sup\{f(x)\} = 0$ болуп, бул маанилерге $y = x$ функциясы каралган интервалдын сырткы чекиттеринде , атап айтканда аралыкка кирбеген учтарында гана жетет.

§8.3 Бир калыпта үзгүлтүксүз функциялар

$f(x)$ функциясы кайсы бир X аралыгында (ачык, туюк, чектелген, чектелбеген боло бериши мүмкүн) жайгашкан чектүү x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болсо, анда аралыктардын тилиндеги үзгүлтүксүздүктүн түшүндүрмөсү боюнча, (“:”-үчүн деп окулат)

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ аткарылат. Мындан функциянын маанилеринин бирдей ε чоңдуктагы өз ара жакындык $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ жыштыгына, ар башка x_0 чекиттеринде аргументтердин, ар башка $\delta = \delta_{x_0}$ жакындык $|x - x_0| < \delta_{x_0}$ жыштыктары туура келерин байкайбыз. Мисалы, $f(x)$ функциясын маанилеринин бирдей чоңдуктагы ε жакындык жыштыгына, аргументтер жай өзгөргөн x' чекиттерде аргументтердин алысыраак δ_1 жакындык жыштыгы, ал эми $f(x)$ функциясы ыкчам өзгөргөн x'' чекиттеринде аргументтердин жакын же кыска аралыктагы δ_2 жыштыгы туура келет (8.14 – чийме).



8.14-чийме

Ошентип табылуучу δ саны ар бир x_0 чекитинде ар башка сан болуп, жалпы учурда x_0, ε сандарынан көз каранды $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ болот. Мындай учурда, X көптүгүн (аралыгын) каалаган x_0 чекити үчүн жарамдуу болгон универсалдуу δ санын табуу мүмкүнбү? – деген суроо туулат. Эгерде табылса, анда ал бир гана ε дон көз каранды $\delta = \delta(\varepsilon)$ болмок. Практикалык эсептөөлөрдө универсалдуу деп эсептелген δ саны катарында, ар бир x_0 чекиттери үчүн табылган $\{\delta_{x_0}\}$ сандарын эң кичинесин $\delta = min\{\delta_{x_0}\}$ алабыз.

8.3 Аныктама. *Эгерде x_0 чекити X аралыгын кайсы жеринде жайгашкандыгына карабастан, алдын ала жетишерлик кичине деп алынган $\varepsilon > 0$ санына жараша, кандайдыр бир $\delta > 0$ саны табылып, аргументтердин $|x - x_0| < \delta$ жакындыкта жайланышынан, алардын тиешелүү маанилерин $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ жакындыгында жайланышы келип чыкса, анда X көптүгүндө аныкталган $f(x)$ функциясын бүтүндөй X аралыгында бир калыпта үзгүлтүксүз функция деп атайбыз.*

Аты айтып тургандай, X аралыгын каалаган жериндеги аргументтердин (оргиналдардын) бирдей δ жакындык жыштыгына же термелүү узундугуна, бир калыпта үзгүлтүксүз функциялардын тиешелүү маанилеринин (элестеринин) бирдей ε жакындык жыштыгы же термелүү узундугу туура келет. Мындайча айтканда, X аралыгынын бардык жеринде

$x \xrightarrow[\delta \text{ ылдамд.}]{} x_0$ жана $f(x) \xrightarrow[\varepsilon \text{ ылдамд.}]{} f(x_0)$ умтулуу ылдамдыктары бир калыпта, же бирдей сактала берет.

Демек, X аралыгында $f(x)$бир калыпта үзгүлтүксүз функция болушу үчүн:

1) $f(x)$ функциясы X аралыгында үзгүлтүксүз болушу;

2) X аралыгын бардык чекиттериндеги аргументтердин бири – бирине бирдей чоңдуктагы жакындашуу жыштыгынан же термелүү узундуктарын барабар болушунан, алардын элестери болгон $f(x)$тин тиешелүү маанилерин жакындашуу жыштыктарын же термелүү узундуктарын бирдей болушу келип чыгышы керек.

Ошентип, бардык эле үзгүлтүксүз функциялар бир калыпта үзгүлтүксүз боло беришпейт. Мисалы $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясы $\left]0,\ \frac{2}{\pi}\right]$ аралыгында үзгүлтүксүз функция болуп эсептелет, анткени бул элементардык функциянын аныкталуу областы $x \neq 0$ болгон бардык чыныгы сандар болуп, берилген аралык аныкталуу областында кармалып турат. Берилген аралыктан $x' = \frac{2}{(2n+1)\pi}$ жана $x'' = \frac{1}{n\pi}$ чекиттерин тандап ($\forall n \in N$), функциянын тешелүү маанилерин

$f(x') = \sin\frac{1}{\frac{2}{(2n+1)\pi}} = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$,

$f(x'') = \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0$ табабыз. Натуралдык n санына ар кандай кичине, чоң маанилерди берүү менен, ар кандай x', x'' аргументтерин алып, алардын арасындагы

$|x' - x''| = \left|\frac{1}{n\pi} - \frac{2}{(2n+1)\pi}\right| < \delta_{x',x''}$ термелүү узундуктарын каалаганча жолу кичинертүүгө, чоңойтууга боло берерин байкайбыз. Бирок, ошол эле учурда функциянын тиешелүү чекиттердеги маанилери өзгөрүүсүз калып, термелүүсү $|f(x') - f(x'')| = |0 - (\pm 1)| = 1$ туруктуу бойдон кала берет. Демек алдын ала $\varepsilon = 1$ санын алсак, анда $\left]0, \frac{2}{\pi}\right]$ аралыгындагы бардык x', x'' чекиттериндеги термелүү узундуктарына жараган универсалдуу $\delta > 0$ санын табуу мүмкүн эмес экендигин көрөбүз. Анткени $n \to \infty \Rightarrow \delta_{x',x''} \to 0$ болгондуктан, универсалдуу $\delta = min\{\delta_{x',x''}\} = 0$ болушу гана мүмкүн болот. Андай болсо,

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясы $\left]0, \frac{2}{\pi}\right]$ аралыгында үзгүлтүксүз болгону менен, бир калыпта үзгүлтүксүз боло албайт деген жыйынтыкка келебиз.

8.6 Кантордун теоремасы. *Эгерде $f(x)$ функциясы D туюк көптүгүндө ($D \subseteq R^n$) үзгүлтүксүз функция болсо, анда бул көптүктө бир калыпта үзгүлтүксүз болот.*

Далилдөө. ►Далилдөөнү $D = [a, b] \subset R$ туюк аралыгында (сегментинде) үзгүлтүксүз болгон, бир өзгөрүлмөлүү $f(x)$ функциясы үчүн жүргүзөлү. Айталы, алдын ала эркин тандалган жетишерлик кичине $\varepsilon > 0$ санына жараша, бул аралыктагы кайсы бир чекиттерде универсалдуу $\delta > 0$ саны табылып, бир калыпта үзгүлтүксүздүктүн талабы аткарылганы менен, табылган δ саны берилген аралыктын айрым чекиттеринде универсалдуулугун жоготуп, жарактуу болбой калсын деп, тескерисинче ойлойлу. Мисалы табылган δ_1 саны берилген аралыктагы $x^{(1)}, x_0^{(1)}$ чекиттерине жарактуу болбосун, б.а.

$\left|x^{(1)} - x_0^{(1)}\right| < \delta_1$ же $x^{(1)} \to x_0^{(1)}$ умтулганда $\left|f\left(x^{(1)}\right) - f\left(x_0^{(1)}\right)\right| \geq \varepsilon$ болуп калсын. Ал эми табылган δ_2 саны $x^{(2)}, x_0^{(2)}$ чекиттерине жарактуу болбосун же

$\left|x^{(2)} - x_0^{(2)}\right| < \delta_2$ умтулганда $\left|f\left(x^{(2)}\right) - f\left(x_0^{(2)}\right)\right| \geq \varepsilon$ аткарылсын. Жалпы учурда табылган δ сандарын $\{\delta_n\} \to 0$ умтулуучу удаалаштык катарында тизмектештирсек, анда ар бир табылган δ_n саны жарактуу болбогон $x^{(n)}, x_0^{(n)}$ чекиттерде, $\left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| < \delta_n$ умтулганда $\left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \geq \varepsilon$ шарты аткарылып кете берүүсү керек. $n \to \infty$ умтулганда, $\delta_n \to 0$ же $\left|x^{(n)} - x_0^{(n)}\right| \to 0$ умтулгандыктан, δ_n саны жарактуу болбогон чекиттер жалпы пределге ээ болуучу удаалаштыктарды түзөрүн байкайбыз $\left\{x^{(n)}\right\} \to x_0$, $\left\{x_0^{(n)}\right\} \to x_0$.

Теореманын шарты боюнча берилген аралыкта $f(x)$ функциясы үзгүлтүксүз болгондуктан, аргументтери умтулган чекиттеги мааниге $\left\{f\left(x^{(n)}\right)\right\} \to f(x_0)$, $\left\{f\left(x_0^{(n)}\right)\right\} \to f(x_0)$ умтулушуп, алардын айырмасы $\left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \to 0$ чексиз кичине болот. Бул n дин бардык маанилеринде $\left|f\left(x^{(n)}\right) - f\left(x_0^{(n)}\right)\right| \geq \varepsilon$ аткарылат деген тескери оюбузга каршы келет. Бул карама - каршылык табылган δ санынын $[a, b]$ аралыгынын бардык чекиттеринде жарактуу экендигин, же $f(x)$ тин берилген аралыкта бир калыпта үзгүлтүксүз экендигин далилдейт.◄

Жогоруда каралган мисалда $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ функциясы $\left]0, \frac{2}{\pi}\right]$ **туюк эмес** аралыгындагы үзгүлтүксүз болгону менен, бул аралыкта бир калыпта үзгүлтүксүз болбогондугунун себеби, анын Кантордун теоремасынын шарттарын канааттандырбагандыгында экендигин сезебиз.

Натыйжа. Эгерде $f(x)$ функциясы $D = [a, b]$сегментинде (туюк көптүгүндө) бир калыпта үзгүлтүксүз болсо, анда кандайдыр бир жетишерлик кичине δ мерчемин таап, бул аралыкты узундуктары δ оң санынан кичине болгон бөлүктөргө бөлүп, бул бөлүктөрдүн ар биринде функциянын термелүүсү ε оң санынан ашып кетпей тургандай абалга жетишүүгө болот.

§8.4 Үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги

Аралыктардагы үзгүлтүксүз функцияларды пайдаланып, кайсы бир көптүктө тынымсыз жүрүп жаткан кубулуштардын жыштыктары менен, алардын элестери болгон функциянын маанилерин жыштыктарын арасындагы мамилени баалоо ыкмасына ээ болдук. Ал эми бир калыпта үзгүлтүксүз функцияларды пайдаланып, кубулуштар менен элестери (кайсы чекитте болбосун) бирдей жыштыкта, же бирдей термелүү узундугунда болорун же болбосун аныктоочу математикалык аппарат түздүк. Ошентип функциялардын жардамы менен кайсы бир кубулуштардын чыныгы сандардын көптүгүндөгү элестерине карап, жүрүү аралыктарын, өнүгүү процесстерин, кайталануучу мүнөздөрүн, токтоп калуу жана улануу шарттарын, жыштыгын, термелүү узундуктарын ж.б.у.с. касиеттерин математикалык моделдерин түзүүгө болот. Кубулуштардын болуп жаткан жеринен (чекиттерден) толук маалымат алуу үчүн, функцияларды да сандар сыяктуу эле ченөө иштеринде колдонуп, алардын арасындагы аралыктарды баалоо менен салыштыруу ыкмаларын ойлоп тапсак, функцияларды чөйрө таануу процесстеринде кеңири колдонуучу каражатка айланта алабыз.

8.4 Аныктама. *D туюк көптүгүндө ($D \subseteq R^n$) үзгүлтүксүз болгон бардык функциялардын* $C[D]$ *көптүгүнө таандык болгон каалагандай эки $f(x)$ жана $\varphi(x)$ функцияларынын арасындагы аралык же метрика деп*

1. $\rho(f,\varphi) = 0 \Leftrightarrow f \equiv \varphi$ дал келишсе гана,

2. $\rho(f,\varphi) = \rho(\varphi, f)$ симметриялуулук,

3. $\rho(f,\varphi) \leq \rho(f, g) + \rho(g,\varphi)$ үч бурчтук – *аксиомаларын канааттандырган*

$$\rho(f,\varphi) = \max_{x\in D} |f(x) - \varphi(x)| \qquad (8.11)$$

санын айтабыз (Мында $g(x) \in C[D]$) .

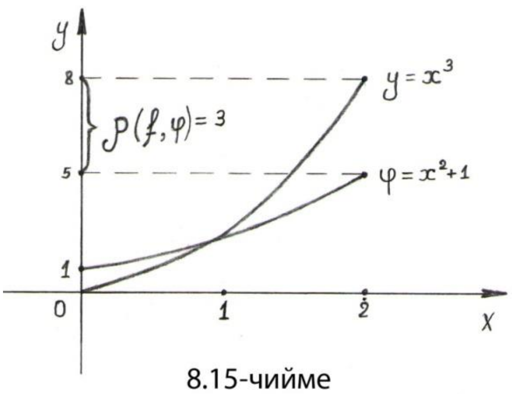
Эгерде $C[D]$ көптүгүндө киргизилген (8.11) метрикасы,

$\forall\ \varphi, f, g \in C[D]$ функцияларына карата метриканын үч аксиомасын канааттандырышса, анда $C[D]$ көптүгүн (8.11) ченөө эрежесине (метрикага) карата, ченелүүчү же метрикалык мейкиндик дейбиз (1 – бөлүк, 1.2.1 –аныктама).

Чынында эле (8.11) аралыктарды ченөө эрежеси бул аксиомаларды канааттандырат, анткени алардын айырмасынын максималдык абалы нөлгө барабар болсо, анда алар бир эле функция болушат. Абсалюттук чоңдуктун касиеттери боюнча $|\mathfrak{f}(x) - \varphi(x)| = |\varphi(x) - \mathfrak{f}(x)|$ жана

$|\mathfrak{f}(x) - \varphi(x)| \leq |(\mathfrak{f}(x) - \mathrm{g}(x)) + (\mathrm{g}(x) - \varphi(x))| \leq |\mathfrak{f}(x) - \mathrm{g}(x)| + |\mathrm{g}(x) - \varphi(x)|$ болгондуктан, 2, 3 – аксиомалардын аткарылышына да оңой эле ишенүүгө болот. Ошентип, $\mathrm{C}[D]$ көптүгү (8.11) ченөө эрежесине (метрикасына) карата метрикалык мейкиндик болуп эсептелет.

$D = [a,\ b]$ сегмент (туюк көптүк) болгон учурда, бул аралыкта үзгүлтүксүз болгон бардык бир өзгөрүлмөлүү функциялардын метрикалык мейкиндигин $\mathrm{C}[a,\ b]$ көрүнүштө белгилейбиз. $\mathrm{C}[a,\ b]$ мейкиндиги өзүнүн бардык пределдик чекиттерин кармап турган толук метрикалык мейкиндик болот. Эгерде $f(x) \in \mathrm{C}[a,\ b]$ болсо, анда Кантордун теоремасы боюнча $[a,\ b]$ туюк аралыгында $f(x)$ функциясын үзгүлтүксүз гана болуп калбай, бир калыпта үзгүлтүксүз деп түшүнөбүз. Функциялардын мындай метрикалык мейкиндигинин түзүлүшү, аларды чөйрө кубулуштарын таануу каражаты катарында колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтет.



8.15-чийме

Мисал катарында C[1, 2]мейкиндигине таандык

$$\mathfrak{f}(x) = x^2 + 1,$$

$\varphi(x) = x^3$ функцияларынын аралыгы же метрикасы кандай аныкталарын көрсөтөлү: Бул мейкиндикте киргизилген (8.11) ченөө эрежесине ылайык,

$$\rho(\mathfrak{f}, \varphi) = \max_{1 \leq x \leq 2} |(x^2 + 1) - x^3| = \max_{1 \leq x \leq 2} |x^3 - x^2 - 1|$$

келип чыгат. Демек, алардын арасындагы аралык деп

$\gamma(x) = x^3 - x^2 - 1$ функциясынын $[1,\ 2]$ аралыгындагы оң белгиси менен алынган максималдык маанисин түшүнөбүз. $\gamma(x)$ функциясынын аралыктын 1, 2 учтарындагы, $\gamma'(x) = 3x^2 - \ 2\,x = x \cdot (3x - 2) \equiv 0$ шартынан табылган критикалык 0 менен $\frac{3}{2}$ чектиттериндеги жана аралыктын учтарындагы маанилерин салыштырабыз

$\gamma(1) = -1,\ \gamma(2) = 4,\ \gamma(0) = -1,\ \gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \ \frac{1}{8}$. Алардын оң маанисин алганда эң чоңу болгон

$$\rho(\mathrm{f}, \varphi) = \max_{1 \le x \le 2} |(x^2 + 1) - x^3| =$$

$= \max\left|\left\{-1,\ 4, -1,\ \ \frac{1}{8}\right\}\right| = 4$ саны, каралган эки функциянын арасындагы (8.11) маанидеги аралык же метрика болот (8.15 – чийме).

3. Көнүгүүлөр

8.1 Предел алдындагы функциялардын үзгүлтүксүздүгүн пайдаланып, төмөндөгү пределдерди эсептегиле.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$; б)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$; в)$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+sinx}{x+cosx}$; г)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{sinx}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(chx - shx)$; е) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a > 0)$; ж)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-cosx)}{x^4}$;

з) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - cos\frac{1}{x}\right)$; и) $\lim\limits_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{sinx}}$; к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sinx}{x}\right)^{\frac{sinx}{x-sinx}}$.

Жооптору: а) $\sqrt{e}$; б) $\frac{2}{3}$; в) 1 ; г) 2 ; д) 0, эгерде $x \to +\infty$; ∞, эгерде $x \to -\infty$; е) $a > 1$ жана $x \to +\infty$ умтулганда 1, $x \to -\infty$ умтулганда 0 болот; $a < 1$ жана $x \to +\infty$ умтулганда 0, $x \to -\infty$ умтулганда 0 болот.

ж) $\frac{1}{8}$; з) $\frac{1}{2}$; и) $cosx$ тин ордуна ага эквиваленттүү болгон

$1 - \cos(1 - cosx)$ чоңдугун алып, 1 жообуна ээ болобуз; к) $\frac{1}{e}$.

8.2 $x \to 0$ учурдагы x негизги чексиз кичине функциясына карата төмөндөгү функциялардын тартиптерин аныктагыла.

а) $e^x - cosx$; б) $cosx - \sqrt[3]{cosx}$; в) $sin\left(\sqrt{1+x} - 1\right)$;

г) $arcsin\left(\sqrt{4+x^2} - 2\right)$; д) $e^{sinx} - 1$.

Жооптору: а) эквиваленттүү болушат; б) 2; в) $\frac{1}{2}$; г) 2; д) эквиваленттүү болушат.

8.3 Эквиваленттүү чексиз кичине функцияларды пайдаланып, төмөндөгү пределдерди эсептегиле.

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x^2}{sin\pi x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{sin^2 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to e} \frac{\ln x - 1}{x-e}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{e^{sinx}-1}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $(a, b - const.)$; з) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{cosx}{x^2}$.

Жооптору: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{\pi}$; в) $\frac{1}{9}$; г) 1 ; д) $\frac{1}{e}$; е) – 1; ж) $a - b$; з) $-\frac{1}{2}$.

8.4 $f(x,y) = \begin{cases} 1, \text{эгерде } y \geq x^4 \text{ же } y \neq 0 \\ 0, \quad \text{эгерде } 0 < y < x^4 \end{cases}$ функциясы O(0; 0) чекитинде үзүлүшкө ээ болгону менен, $\varphi(t) = f(at; bt)$ функциясы каалагандай a, b сандары үчүн $t = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз функция болот, б.а. аргументтер O(0; 0) чекитине келүүчү бардык $\begin{cases} x = at, \\ y = bt \end{cases}$ түздөрү боюнча умтулса, үзгүлтүксүздүктүн шарттары аткарылат. Аргументтер кандай ийири менен O(0; 0) чекитине умтулган кезде үзгүлтүксүздүк шарты бузуларын көрсөткүлө.

8.5 O(0; 0) чекитинде ар бир координаталары боюнча жекече үзгүлтүксүз болгондугуна карабастан, жалпы учурда үзүлүшкө ээ болорун далилдеп, графикте көрсөткүлө:

а) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & y = 0 \text{ болсо,} \\ \sqrt{4-y^2}, & x = 0 \text{ болсо,} \\ 0, & x \neq 0, y \neq 0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясын;

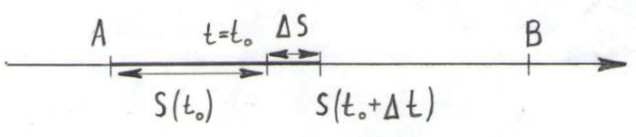
б) $f(x,y) = \begin{cases} 0, \text{ эгерде } xy \neq 0, \\ 1, \text{ эгерде } xy = 0 \end{cases}$ функциясын.

IX ГЛАВА. БИР ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДИФФЕРЕНЦИРЛӨӨ

§ 9.1 Функциядан туунду алуу амалы

9.1.1 Функциянын чекиттеги туундусун эсептөө же дифференцирлөө

Дифференцирлөө деген сөз кыргызча майдалап жекече бөлүштүрүү деген мааниде болуп, туунду алуу эрежесинин механикалык процесстерди (ылдамдык, тыгыздык, басым ж.б.) чекитке чейинки тактыкта майдалап түшүнүү аракеттеринен улам келип чыккандыгынан кабар берет. Предел аппараты табылганга чейин, көбүнчө математиканы турактуу кубулуштарды (аянт, көлөм ж.б.) моделдештирүүдө колдонушуп, кыймылдуу кубулуштардын орточо маанилери боюнча (орточо ылдамдык, орточо тыгыздык ж.б.) үйрөнүү мүмкүнчүлүктөрү гана бар эле. Пределди математикада таанып билүү каражаты катарында колдонуу ыкмалары иштелип чыккан соң, аралыктарда өзгөрүлмө кубулуштарды орточо маанилери боюнча эмес, ар бир чекиттеги абалдары боюнча таанып билүүгө шарт түзгөн математикалык аппараттар ойлонулуп табылды. Алгачкылардан болуп Лейбниц, Ньютон колдонгон деген маалыматтар бар. Алардын бири туунду алуу эрежеси болуп эсептелет. Мисалы узундугу $S = |AB|$ болгон аралыкты, t убактысында басып өткөн автомобилдин орточо ылдамдыгы $v = \frac{S}{t}$ же $v = v(t)$ көрүнүштө аныкталганы менен, убакыттын ар бир ирмемдеринде автомобиль кандай ылдамдамдыктарда болгонун билбейбиз.

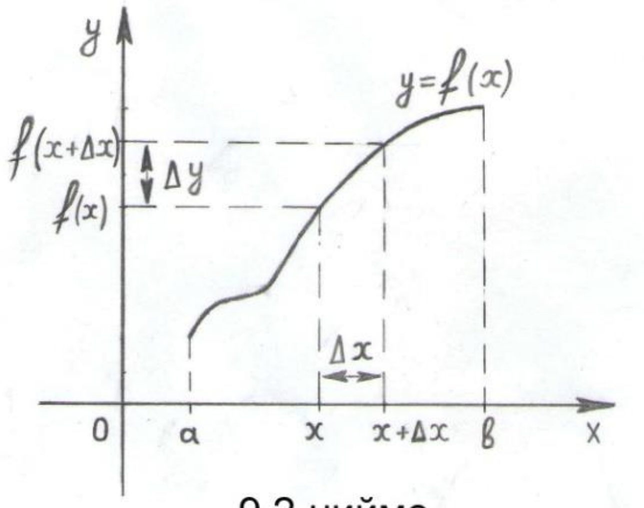


9.1-чийме

Аны билүү үчүн, басып өткөн жолдун t убактысы менен көз карандылык байланыштын эрежеси болгон $S = v \cdot t$ же $S = S(t)$ функциясын түзөбүз. Айталы, убакыттын t_0 ирмеминде автомобиль $S(t_0)$ узундуктагы жолду басып өтсүн. Бирок, убакыттын ушул t_0 ирмемин токтотуп туруу мүмкүн эмес болгондуктан, ченөөдө жетишерлик кичине Δt убактысына каталык кетиришибиз мүмкүн. Ченөө каталыгы кошулган $t_0+\Delta t$ ирмемде автомобиль $S(t_0+\Delta t)$ узундуктагы жолду басып өтүүгө үлгүрдү десек (9.1 – чийме), анда Δt каталык убактысында автомобиль $\Delta S = S(t_0+\Delta t) - S(t_0)$ узундуктагы жол жүргөн болуп, бул аралыктагы орточо ылдамдыгы $v_{\text{орт.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ көрүнүштө эсептелет. Ал эми убакыттын накта t_0 ирмеминдеги ылдамдыкты табуу үчүн, каталыкты $\Delta t \to 0$ нөлгө чейин азайтуу зарыл. Демек, каталык убактысындагы орточо ылдамдыктын $\Delta t \to 0$ умтулгандагы пределинин мааниси, убакыттын накта t_0 ирмеминдеги ылдамдык болуп эсептелет

$\mathrm{v}_{t_0} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} v_{орт.} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{S(t_0+\Delta t)-S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0)$. Математикада бул пределдин мааниси $S = S(t)$ функциясынан же жолдон, t_0 чекитинде алынган туунду деп аталат. Ошентип математикадагы функциянын туундусу түшүнүгү, механикалык процесстердин көз ирмемдеги абалдарын моделдештирүү зарылчылыгынан улам келип чыккан.

Айталы, $y = f(x)$ функциясы $]a,\ b[$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз функция болсун. Бул аралыктан каалагандай x фиксирленген (кыймылы токтотулган) чекитин алып, ага Δx өсүндүсүн же термелүүсүн берели. Берилген Δx өсүндүсү x чекитинин оң же сол тарабына берилгенине жараша, Δx эркин белгилерге жана чоңдуктарга ээ боло бергени менен, ага $x + \Delta x$ четтөөсү берилген интервалдан чыгып кетпесин деген шарт коюлат. $f(x)$ функциясы $]a,\ b[$ аралыгында үзгүлтүксүз болгондуктан, Δx ке жараша же андан көз каранды болгон, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ термелүүсүнө (өсүндүсүнө) ээ болот (9.2 – чийме).



9.2-чийме

x чекитиндеги функция менен аргументтин өсүндүлөрүн (термелүүлөрүн) катышын түзөлү $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ $(\Delta x \neq 0)$. x чекити фиксирленген деп эсептелгендиктен $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi(\Delta x)$ катышын, Δx өзгөрүлмө термелүү (өсүндү) чоңдугунан гана көз каранды деп түшүнүп, предел эсептөөдө x ке турактуу сан катарында мамиле жасайбыз.

$y = f(x)$ функциясын $[a,\ b]$ сегментинде (туюк аралыгында) карабагандыбыздын себеби, фиксирленген x чекити аралыктын учтарында жайгашып калган учурда $x + \Delta x$ четтөөсү аралыктан чыгып кетиши мүмкүн. Мисалы $x = a$ десек, “$-\Delta x$” терс өсүндүсүн бергенде $x - \Delta x$, берилген сегменттин сол жак сыртына чыгып кетет. Ошондуктан, ар бир x чекитин Δx аралыгына козгогон кезде аралыктын сыртына чыкпай турган мүмкүнчүлүктү сактап калуу максатында, аралыктын учтарындагы чекиттерди таштап жиберип, аралыктын ички чекиттери болгон интервалда (ачык көптүктө) өзгөрүүчү чекиттерди карайбыз.

∘ **9.1 Аныктама**. *Эгерде* $\Delta x \to 0$ *умтулгандагы* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *катышын предели жашаса, анда ал пределдин мааниси* $f(x)$ *функциясынан* x *чекитинде алынган туунду деп аталып, жазуу ыңгайына жараша* $f'(x)$, $y'(x)$, y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ *көрүнүштөрдө белгиленет.*

Мисалы $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$ бөлчөк көрүнүштөгү белгилөөлөр Лейбниц тарабынан киргизилип, алымы менен бөлүмү ар башка сандар катары элестетилип, функциялар менен болгон арифметикалык амалдарда аларды кошулуучу, көбөйтүндү, тийинди катарында колдонууга ыңгайлаштырган.

Ошентип 9.1 – аныктамасы боюнча функциянын туундусу предел аппаратын жардамы менен киргизилип,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (9.1)$$

көрүнүштө жазылган жаңы алгебралык амал же эреже катарында эсептөөгө болот. Эгерде $f(x)$ функциясынын $]a,\ b[$ интервалынын ар бир x чекитинде туундусу жашаса, анда аны бүтүндөй интервалда туундулануучу функция дейбиз. “Туунду” – термини, “пределден келтирип чыгарылган натыйжа” маанисинде айтылып калган. Ал эми функциядан (9.1), (9.2) эрежелери боюнча туунду алуу процессин же өсүндүлөрдүн катышын түзүп, пределин эсептөөнүн жүрүшүн, **функцияны дифференцирлөө** деп айтабыз.

x өзгөрүлмөсүн фиксирлебей кыймылга келтирүү менен, $f'(x)$ туундусу да функция болорун көрөбүз. Бирок $f'(x)$ функциясы берилген $]a,\ b[$ интервалынын айрым чекиттеринде үзүлүүгө ээ болуп, маанилери жашабай калышы да мүмкүн болорун эскертебиз.

Иш жүзүндө функциядан туунду алуу амалы (9.1) пределин эсептөө болуп эсептелип, эсте тутууга кыйын, узун процесске окшоп кетет. Ошондуктан аны жогорудагы белгилөөлөрдүн жардамы менен $f(x)$ функциясын, $f'(x)$ функциясына чагылтуучу оператор катарында эстеп калуу ыңгайлуу:

$$\frac{df(x)}{dx} \Leftrightarrow\ f(x) \to f'(x) \text{ же } \quad Df\colon f(x) \to f'(x)\,. \qquad (9.1)^*$$

4. Мисалдар

1) $y = x^3$ функциясын аныкталуу областына таандык каалагандай x чекитиндеги туундусун (9.1) эрежеси боюнча эсепейли. x аргументи $x + \Delta x$ өсүндүсүн алса, функция $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 +$

$+3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ өсүндүсүнө ээ болот. Демек туундусу

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$= \lim_{\Delta x\to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x\cdot 0 + (0)^2 = 3x^2$ көрүнүштөгү функция болуп, ал $y = x^3$ функциясы аныкталган областта аныкталып, үзгүлтүксүз функция болорун байкайбыз.

2) $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ функциясын x чекитиндеги туундусун эсептейли. $x+\Delta x$ четтөөсүнө $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x}-1)$ термелүүсү туура келет. Анда (8.9) сонун пределин эске алып, туундусу

$(a^x)' = y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x \ln a$ функциясы болорун көрөбүз. Мында да функция менен анын туундусу бир аралыкта аныкталышып, үзгүлтүксүз болушат.

3) $y = \sqrt[3]{x}$ функциясын аныкталуу областы $X =]-\infty, +\infty[$ аралыгы болгону менен, анын туундусу

$y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$ болуп, $\frac{\Delta x}{x} = t$ белгилесек $\Rightarrow$ $\Delta x \to 0 \Rightarrow t \to 0$ жана $\lim\limits_{t \to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{3}} - 1}{t} = \frac{1}{3}$ болгондуктан, $y'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ функциясы экендиги келип чыгат. Анын аныкталуу областына X көптүгүндөгү $x_0 = 0$ чекити кирбейт, б.а. $y(x)$ бул чекитте үзгүлтүксүз болгону менен, анын $y'(x)$ туундусу

$X =]-\infty,\ 0[\cup]0, +\infty[$ аралыгында аныкталып, $x_0 = 0$ чекитинде II – түрдөгү үзүлүүгө ээ болот. Бирок $y = \sqrt[3]{x}$ функциясын $x_0 = 0$ чекитинде $y'(x) = +\infty$ чектелбеген туундусу жашайт.

4) $y = |x|$ функциясы $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз болгону менен туундусу жашабайт. Чынында эле анын туундусун (9.1) эрежеси менен эсептесек,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x} = \left| \begin{matrix} x = 0 \\ \text{десек} \end{matrix} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} +1 \text{ эгерде } \Delta x > 0, \\ -1 \text{ эгерде } \Delta x < 0 \end{cases}$$

предели кош мааниге ээ болуп, туундунун жашабай тургандыгын көрөбүз.

- $]a,\ b[$ ***интервалынан эркин алынуучу фиксирленген чекитти*** *конкреттештирп* x_0 *деп белгилеп,* $f(x)$ *функциясын* x_0 *чекитиндеги туундусун* $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (9.2)

көрүнүштөгү эреже менен эсептөөгө да болот. Чынында эле $x - x_0 = \Delta x$ белгилөөсүн киргизсек, $x \to x_0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$ жана $x = x_0 + \Delta x$ болуп, (9.2) ге жаңы белгилөөлөрдү коюп, (9.1) ди алабыз. Демек функциянын чекиттеги туундусун эсептөөдө (9.1), (9.2) эрежелерин кайсынысын болсо да колдоно берүүгө болот.

Функциянын туундусун эсептөөнүн (9.2) эрежесин пайдаланып, T мезгилдүү функциянын туундусу да T мезгилдүү функция болорун көрсөтөлү:

$f(x+\mathrm{T}) = f(x) \wedge f(x_0+\mathrm{T}) = f(x_0)$ болсо, $x+\mathrm{T} \to x_0+\mathrm{T} \Leftrightarrow x \to x_0$ экендигин эске алып, (9.2) эрежесин пайдаланып,

$$f'(x_0+\mathrm{T}) = \lim_{x+\mathrm{T} \to x_0+\mathrm{T}} \frac{f(x+\mathrm{T})-f(x_0+\mathrm{T})}{(x+\mathrm{T})-(x_0+\mathrm{T})} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

теңдештигине ээ болобуз. Ошондой эле жуп функциянын туундусу так, так функциянын туундусу жуп болорун да байкоого болот. Мисалы $f(x)$ жуп функция же $f(-x) = f(x) \wedge f(-x_0) = f(x_0)$ болсун, анда

$(-x)-(-x_0) = -(x-x_0) \quad \wedge \quad x \to x_0 \Leftrightarrow (-x) \to (-x_0)$ келип чыгат. Анда (9.2) ни колдонуп, жуп функциянын туундусу

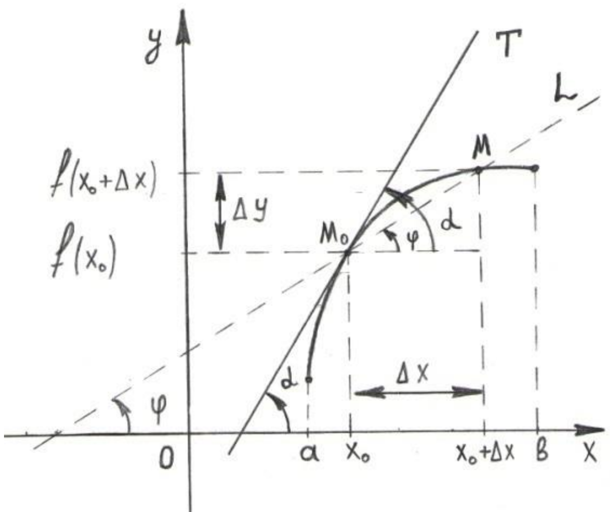
$f'(-x_0) = \lim\limits_{(-x) \to (-x_0)} \frac{f(-x)-f(-x_0)}{(-x)-(-x_0)} = -\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -f'(x_0)$ так функция болоруна күбө болобуз.

- ***Эгерде пределдин мааниси табылып чектелген сан болсо, анда функцияны туунду алынуучу чекитте дифференцирленүүчү, ал эми предели жашабаса же жашаганы менен чектелбеген*** $\pm\infty$ ***сан болсо, анда бул чекитте дифференцирленбөөчү деп айтабыз.***

Мисалы, жогоруда каралган $y = \sqrt[3]{x}$, $y = |x|$ функциялары $x_0 = 0$ чекитинде дифференцирленбөөчү же өзгөрүү ылдамдыгын чекиттеги тактыкка чейин үйрөнүүгө мүмкүн болбогон функциялар болушат. Ошондой эле,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, \; \textit{эгерде } x \neq 0 \; \textit{болсо}, \\ \quad 0, \; \textit{эгерде } x = 0 \; \textit{болсо} \end{cases}$$ функциясы да $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз болуп, бардык $x \neq 0$ чекиттеринде чектүү туундулары жашап, дифференцирленүүчү болгону менен $x = 0$ чекитинде туундусу жашабай, дифференцирленбөөчү болот. Чынында эле,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{1}{\Delta x}$$ предели жашабайт, анткени анын пределдери көп же чексиз маанилүү болуп, $[-1, 1]$ сегментиндеги ар кандай сан боло бериши мүмкүн. Аны $\frac{1}{\Delta x} \to \infty$ умтулганда ага кошо умтулуучу $\left\{\frac{1}{\Delta x_n}\right\} \to \infty$ жекече удаалаштыктарын түзүү менен көрсөтүүгө болот. Пределдин жалгыздык шарты бузулгандыктан, сөз кылынган предел жашабайт же мисалдагы функция $x = 0$ чекитинде дифференцирленбөөчү болот деген жыйынтыкка келебиз.



9.3-чийме

Натыйжа. Берилген аралыкта чектүү туундусу жашаган функцияны, ушул аралыкта дифференцирленүүчү функция дейбиз. Берилген x_0 чекитинде үзгүлтүксүз функция, бул чекитте ар дайым эле дифференцирленүүчү боло бербейт, анткени анын x_0 чекитинде туундусу жашабай калышы же чектелбеген сан болуп калышы мүмкүн (3 – мисалда $x = 0$ чекитинде үзгүлтүксүз бирок дифференцирленбөөчү).

9.1.2 Туундунун геометриялык мааниси

- $]a, b[$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз $y = f(x)$ функциясын карайлы. Бул аралыктагы функциянын графигин тургузуп, графикте жайгашкан $M_0(x_0; f(x_0))$ чекитин белгилеп алып ($y_0 = f(x_0)$), бул чекиттен функциянын графигине Т жаныма түзүн жүргүзөлү (9.3 – чийме). Оx огу менен Т жанымасын арасындагы бурч α болсун. x_0 чекитини Δx өсүндүсү менен $x_0+\Delta x$ козгосок, функция $f(x_0+\Delta x)$ абалына козголуп, M_0 чекити

$$M(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$$

чекитине которулат. Функциянын графигин M_0, M чекиттеринде кесип өтүүчү L түзүн жүргүзөлү, ал Оx огу менен φ бурчун түзсүн дейли. Эгерде $\Delta x \to 0 \Rightarrow \mathrm{M} \to \mathrm{M}_0 \wedge \varphi \to \alpha$ умтулуп, L түзү $y=f(x)$ функциясына $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн Т жаныма түзүнүн абалына умтулат. L түзүнүн бурчтук коэффициенти $k_l=tg\,\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ болгондуктан, функциянын графигинде жайгашкан $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн Т жанымасынын бурчтук коэффициенти,

$$k_{\mathrm{T}}=\mathrm{tg}\alpha=\lim_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0}k_L=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad (9.3)$$

функциянын x_0 чекитиндеги $k_T=f^{'}(x_0)$ туундусуна барабар болорун көрөбүз. Ошентип $y=f(x)$ функциясын графигине $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түздүн $y-y_0=k_{\mathrm{T}}(x-x_0)$ теңдемеси, (9.3) түн негизинде $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ көрүнүштө жазылат.

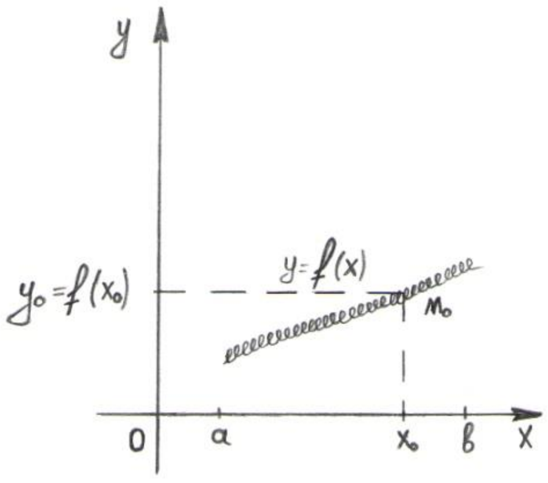
- $y=f(x)$ *функциясын графигиндеги* $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ *чекитинен графикке түшүрүлгөн нормаль түз деп,* $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ *чекити аркылуу өтүүчү жана ушул чекиттен графикке жүргүзүлгөн жаныма түзгө перпендикуляр болгон түздү айтабыз.*

Ошондуктан эки түздүн перпендикулярдуулук шарты боюнча алардын бурчтук коэффициенттери $k_{\text{жан.}}\cdot k_{\text{нор.}}=-1$ шартын канааттандырышып, $k_{\text{нор.}}=-\frac{1}{k_{\text{жан.}}}=-\frac{1}{f'(x_0)}$ болгондуктан, нормаль түздүн теңдемеси $y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$ көрүнүштө болот ($f'(x_0)\neq 0$). Эгерде $f'(x_0)=0$ болсо, анда жогорудагы жаныма Оx

огуна параллель $y = y_0$ түзүнө, ал эми нормаль Оy огуна параллель $x = x_0$ түзүнө айланышат.

9.1.3 Оң, сол жактуу туундулар жана чекиттеги чектелбеген туунду. Аларды геометриялык чечмелөө

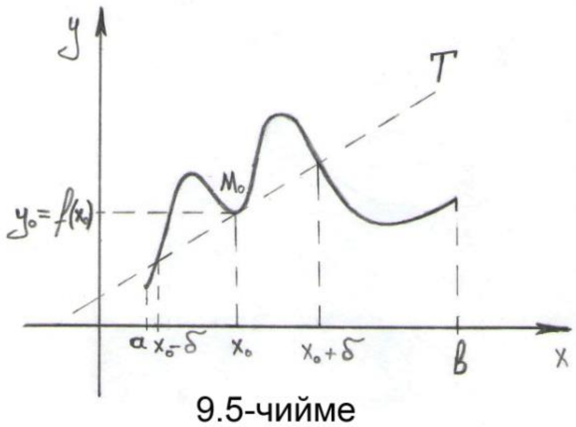
Функциянын x_0 чекитиндеги оң жана сол жактуу пределдерин эске алып, туунду алуунун (9.2) эрежесин негизинде x_0 чекитинде оң жана сол жактуу туундуларды эсептөө эрежелерин табабыз.



9.4-чийме

- **9.2 Аныктама.** $f(x)$ *функциясын* x_0 *чекитиндеги сол жактуу туундусу деп, сол жактуу* $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0-0)$ *пределин маанисин, ал эми оң жактуу туундусу деп, оң жактуу* $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0+0)$ *пределин маанисин айтабыз.*

Сол жактуу туундуда $\Delta x < 0$ өсүндүсү x_0 чекитин сол жагына козгоп, $\Delta x \to 0$ умтулуу процесси сол жактан жүрөт. Оң жактуу туундуда $\Delta x > 0$ өсүндүсү x_0 чекитин оң жагына козгоп, $\Delta x \to 0$ умтулуу процесси оң жактан жүрөт. Демек, туунду алуунун (9.1) эрежесинин маанисинде сол жактуу туундуну



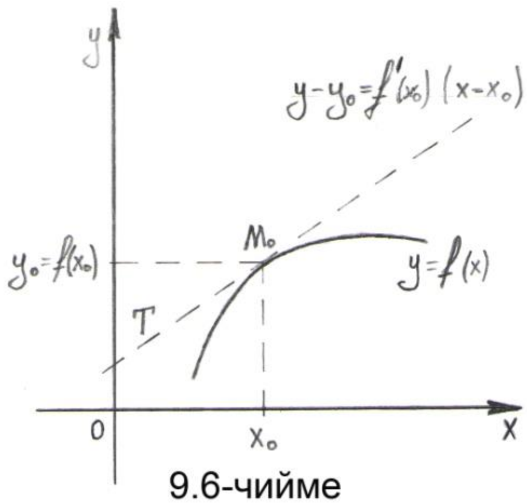
9.5-чийме

$f'(x_0-0) = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, оң жактуу туундуну

$f'(x_0+0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ көрүнүштөрдө эсептөөгө болот.

Функциянын чекиттеги предели жалгыз гана болгондуктан, x_0 чекитинде функциянын чектүү $f'(x_0)$ туундусу жашаса, анда анын бул чекиттеги оң жана сол жактуу туундулары да жашап,

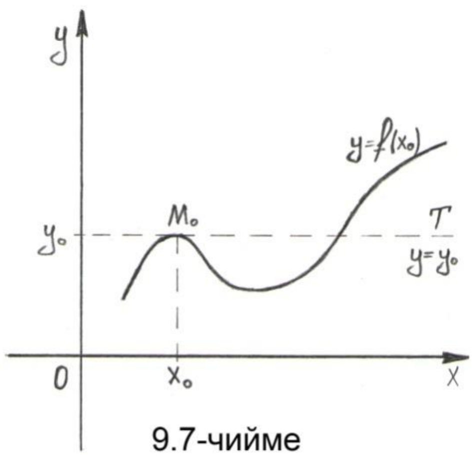
$$f'(x_0-0)=f'(x_0)=f'(x_0+0) \quad (9.4)$$



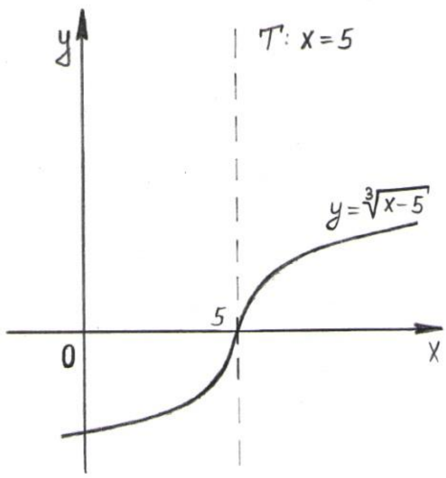
9.6-чийме

теңдештиги орун алат. Бирок айрым учурларда $f(x)$ функциясын x_0 чекитинде туундусу жашабаганы менен, анын оң же сол жактуу туундуларын бири же экөөсү тең жашай бериши мүмкүн. Мисалы $f(x)=|x|$ функциясын $x_0=0$ чекитинде үзгүлтүксүз болгонуна карабастан туундусу жашабайт, анткени оң жактуу туундусу

$f'(x_0-0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$, ал эми сол жактуу туундусу



9.7-чийме



9.8-чийме

$f'(x_0+0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=+1$ келип чыгып, алар барабар эмес болушат же (9.4) аткарылбайт.

x_0 *чекитинде* туундусу жашабаса, анда геометриялык жактан функцияга $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинде (мисалда O(0;0) чекитинде) жаныма түз сызыгын жүргүзүү мүмкүн эмес деп эсептейбиз.

- *Математикалык бүтүмдөрдө, көбүнчө $f(x)$ функциясынын нөлдөн айырмалуу чектүү туундусу жашасын деген шарт коюлуп келет, геометриялык жактан бул шарт, анын графигиндеги бардык чекиттерден жаныма түз жүргүзүү мүмкүн болсун дегенди түшүндүрүп, графиги жылмакай дегенди билдирет.*

Айрым учурларга токтололу:

1^0 Берилген чекиттерде үзгүлтүксүз болгону менен, туундусу жашабаган функциялардын графиктери ар бир чекитте ыкчам (сынык же секирик мүнөздө) өзгөрүп, жаныма жүргүзүлгөн чекиттин жакынкы чеке белинде жаныма болуучу түз, графикти кесип өтүп, жаныманын 6.6 – аныктамасын аткарылбайт, же $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чектинен жаныма жүргүзүү мүмкүн эмес. (9.4 – чийме). Мындай функциялардын графиктерин жылмакай эмес “сыныктуу” десе болот.

2^0 x_0 чекитинде дифференцирленүүчү же чектүү туундуга ээ болгон функциянын графигине, $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинде (жок дегенде жакынкы чеке белинде графигин кеспейт) жаныма түз жүргүзүү мүмкүн болгондуктан, функцияны бөлүкчө жылмакай дейбиз (9.5 – чийме).

3^0 Эгерде аралыктын бардык x чекиттеринде чектүү туундусу жашаса, же дифференцирленүүчү болсо, анда аны ушул аралыкта жылмакай функция деп айтабыз (9.6 – чийме).

4^0 Ал эми чектүү туундусу жашаганы менен, ал $f'(x_0) = 0$ болсо, анда x чекитине жакынкы чеке белде функция турактуу чоңдук болуп, M_0 чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз Ox огуна параллель жайгашат (9.7 – чийме).

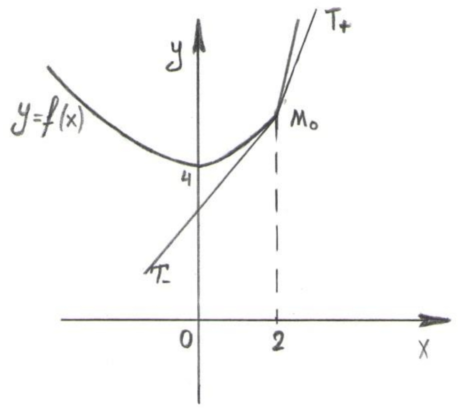
5^0 $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болуп, чекиттеги туунду алуунун (9.1) эрежеси боюнча $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ же

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$ пределдерине ээ болсо, же $f(x)$ функциясы дифференцирленбөөчү болсо да, бул чекитте тиешелүү түрдө $+\infty$ же “$-\infty$” чектелбеген туундуларга ээ болот деп түшүнөбүз. Бул учурда функциянын графигине $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз $\mathrm{O}x$ огуна перпендикуляр болот. Себеби жаныма түздүн бурчтук коэффициенти $k_{\text{т}}=tg\alpha=\pm\infty\Rightarrow\alpha=\pm\frac{\pi}{2}$ болот. Мисалы, $y=\sqrt[3]{x-5}$ функциясын $x_0=5$ чекитиндеги туундусу $+\infty$ болот. Чынында эле туунду алуунун (9.2) эрежеси боюнча,

$$y'(5)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x-5}-\sqrt[3]{5-5}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}=+\infty$$

келип чыгарын көрөбүз. $y_0=\sqrt[3]{5-5}=0$ болгондуктан, берилген функциянын графигине $\mathrm{M}_0(5;0)$ чекитинде жүргүзүлгөн жаныма $\mathrm{O}y$ огуна параллель $x=5$ түзү болушу керек эле, бирок ал графикти кесип өткөндүктөн жаныма боло албайт (9.8 – чийме). Жаныма $\mathrm{M}_0(5;0)$ чекитинен жогору карай чыккан шоола (жарым жаныма) сыяктуу элести бергени менен, жаныманын аныктамасы аткарылбайт.

Аралыктын чекиттеринде ушундай $f'(x)=0$, $f'(x)=\pm\infty$ учурлары тынымсыз кайталана берсе, анда функциянын графиги сынык тырышуу кейпинде болуп, изилденүүчү кубулуштун мүнөзүнө туура келбей калышы мүмкүн, анткени жаратылышта көз ирмем сайын кескин өзгөрүүчү кубулуштар сейрек кездешет. Ошондуктан чагылтылып жаткан кубулуштардын жүрүү шартына жараша, функцияга берилген аралыкта нөлдөн айырмалуу, чектелген туундусу жашасын деген сыяктуу шарттар коюлат.



9.9-чийме

6⁰ $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болуп, оң жана сол жактуу туундулары жашаганы менен $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$ өз ара барабар эмес болушса, анда бул чекитте туундусу жашабагандыктан, графиги $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде сынууга учурап, жылмакай эмес же жаныма жүргүзүүгө мүмкүн болбойт. Бул учурда M_0 чекитин бурчтагы чекит деп коюшат. Мисалы $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \text{ болсо}, \\ x^3, & x\geq 2 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясы $x_0=2$ чекитинде үзгүлтүксүз болуп, сол жактуу $f'(x_0-0)=2x_0=2\cdot 2=4$,

оң жактуу $f'(x_0+0)=3{x_0}^2=3\cdot 4=12$ туундулары барабар эмес. Анын графиги $M_0(2;\,8)$ бурчтук чекитинде сынууга учурап, жаныма жүргүзүү мүмкүн эмес. Бирок эки жактуу туундулары жашап жаткандыктан, графикке $M_0(x_0;y_0)$ чекитинин эки тарабында, өз өзүнчө T_- жана T_+ жарым жаныма түздөрүн жүргүзө алабыз (9.9 – чийме).

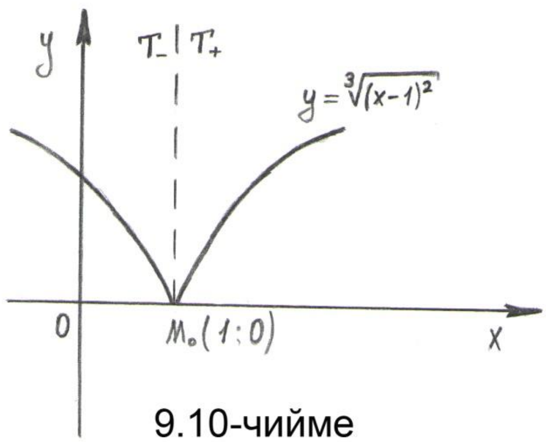
7⁰ $f'(x_0-0)=-\infty$, $f'(x_0+0)=+\infty$ болгон учурда, x_0 чекитинде $f(x)$ функциясынын үзгүлтүксүз экендигине карабастан, туундусу жашабайт. Анын графиги $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде сынып, мизи төмөн караган курч кесүүчү буюмду элестетет. Албетте, анын графигине жүргүзүлгөн жарым жаныма түздөрдүн T_- , T_+ экөөсү тең, Оy огуна параллель түздөр болушуп, бири – бирин улап дал келишип бүтүн түзгө окшоп кетишет.

Мисалы $y(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ функциясын $x_0=1$ чекитиндеги туундусун эсептеп көрөлү.

$$y'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[3]{(x_0+\Delta x-1)^2}-\sqrt[3]{(x_0-1)^2}}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{(x_0-1)^2}}{(x_0-1)}\lim_{x\to x_0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{(x_0-1)}\right)^{\frac{2}{3}}-1}{\frac{\Delta x}{(x_0-1)}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x_0-1)^2}}{x_0-1}$$

келип чыгып, $y'(x_0)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x_0-1}}$ туундусуна ээ болобуз. Мындан x_0 чекити 1 санына сол жактан келсе $y'(x_0-0)\to\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{-0}}=\frac{2}{-0}=-\infty$, ал эми оң жактан келсе

$y'(x_0+0)\to\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{+0}}=\frac{2}{+0}=+\infty$ туундуларына ээ болорун көрөбүз. Берилген функциянын графигин тургузуп, чынында эле функциянын графиги $M_0(x_0;y_0)=M_0(1;0)$ бурчтук чекитинде сынып, бул чекиттен



9.10-чийме

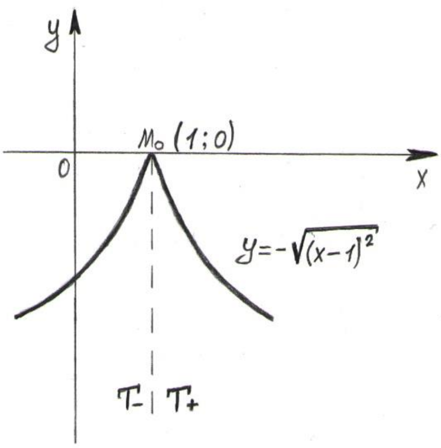
эки T_- , T_+ жарым жаныма шоолалар чыкканы менен, алар жаныманын аныктамасын шарттарына баш ийбегендиктен, жаныма жүргүзүү мүмкүн эмес. Бул чекиттеги графиктин сынуусу, мизи төмөн караган курч кесүүчү буюмду элестетет (9.10 - чийме).

Ал эми x_0 чекитинде $f(x)$ үзгүлтүксүз болуп, туундусу жашабаса да, анын бул чекиттеги эки жактуу туундулары $f'(x_0-0)=+\infty$, $f'(x_0+0)=-\infty$ чектелбеген маанилерге ээ болсо, анда анын графиги $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде сынып, жаныма жүргүзүүгө мүмкүн болбойт. Ошондой болсо да бул чекиттин эки тарабынан T_+ , T_- бири - бирине дал келишкен жарым жаныма түздөрүн жүргүзө алабыз.

Функциянын графиги төмөн караган мизинде M_0 чекити жайгашкан, кесүүчү буюмду элестететкен учурга мисал катарында $y(x)=-\sqrt[3]{(x-1)^2}$ функциясын карасак, анын $x_0=1$ чекитинде сол жактуу $y'(x_0-0)\to\frac{2}{-3\cdot\sqrt[3]{-0}}=\frac{2}{+0}=+\infty$ туундусуна, оң жактуу

$y'(x_0+0)\to\frac{2}{-3\cdot\sqrt[3]{+0}}=\frac{2}{-0}=-\infty$

туундусуна ээ болорун көрөбүз. Анын графиги $M_0(x_0;y_0)=M_0(1;0)$ бурчтук чекитинде мизи жогору караган кесүүчү буюмга окшош болот (9.11 – чийме).



9.11-чийме

Натыйжа. *Функциялардын графиктерин бөлүкчө жылмакай же жылмакай болуусун талап кылуу, алар сүрөттөгөн кубулуштардын ыкчам - сынык көрүнүшүндө болбостон, ырааттуу жүрүү процесси* *менен өзгөрүүсүн мүнөздөө максатын көздөйт. Каралуучу туюк аралыкта үзгүлтүксүз функция Вейерштрасстын теоремасы боюнча сөзсүз чектелген болгондуктан, аралыктын бардык чекиттеринде өзү менен кошо туундусу да үзгүлтүксүз болгон функциялар гана жылмакай болушат. Каралган бардык учурларда $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, графиги үзүлбөгөн сызык бойдон калып, айрым учурларда көрсөтүлгөндөй сынуу чекиттерине дуушар болот.*

§9.2 Функциянын дифференциалы

9.2.1 Дифференциал түшүнүгү

∘ Жогоруда (9.1.1де) x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясын туундусун табуу үчүн, (9.1) же **(**9.2) эрежелери боюнча пределдерди эсептөө процессинде: алардын чектүү пределдерин табуу мүмкүн болсо, же функциянын x_0 чекитинде чектүү туундусу жашаса, анда $f(x)$ функциясын x_0 чекитинде дифференцирленүүчү деп айттык. Айталы x_0 чекитинде (9.1) пределинин чектүү $f'(x_0)$ мааниси табылып, $f(x)$ бул чекитте дифференцирленүүчү болсун дейли. Анда предел алдындагы туюнтма өзүнүн пределдик маанисинен чексиз кичине чоңдукка гана айырмаланып тургандыктан,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\ \Rightarrow\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\mathrm{o}(\Delta x)\ \text{ же}$$

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\mathrm{o}(\Delta x)\Delta x \qquad (9.5)$$

барабардыгы орун алат. Мындан x_0 чекитиндеги Δy чексиз кичине чоңдугун $f'(x_0)\neq 0$ болгон учурдагы башкы бөлүгү $f'(x_0)\Delta x$, ал эми ага салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүгү же көңүлгө албай таштап жиберүүгө боло бере турган бөлүгү $\mathrm{o}(\Delta x)\Delta x$ болорун байкайбыз. Эгерде $f'(x_0)=0$ болуп калса, $f'(x_0)\Delta x=0$ болуп, нөл саны бардык чексиз кичине чоңдуктарга салыштырмалуу эң жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук болгондуктан, нөлгө тең болгон $f'(x_0)\Delta x$ саны эч качан башкы бөлүк боло албайт эле. Ошондуктан $f'(x_0) \neq 0$ шарты коюлган.

9.3 Аныктама. *Эгерде* $f(x)$ *функциясы* x_0 *чекитинде диффренцирленүүчү болсо, анда функциянын бул чекиттеги* Δy *өсүндүсүн* $f'(x_0)\Delta x -$ *башкы бөлүгү (сызыктуу бөлүгү), ушул чекиттеги функциянын дифференциалы деп аталып,* $dy = f'(x_0)\Delta x$ *символу менен белгиленет.*

Функциянын чекиттеги дифференциалын көркөмдүү жазуу максатында, Δx ти dx менен алмаштырып,

$$dy = f'(x_0)dx \qquad (9.6)$$

көрүнүштө жазуу макулдашылган. Кыймылы фиксирленген x_0 чекитин кыймылга келтирип, $f(x)$ дифференцирленүүчү болгон бардык x чекиттериндеги функциянын дифференциалын

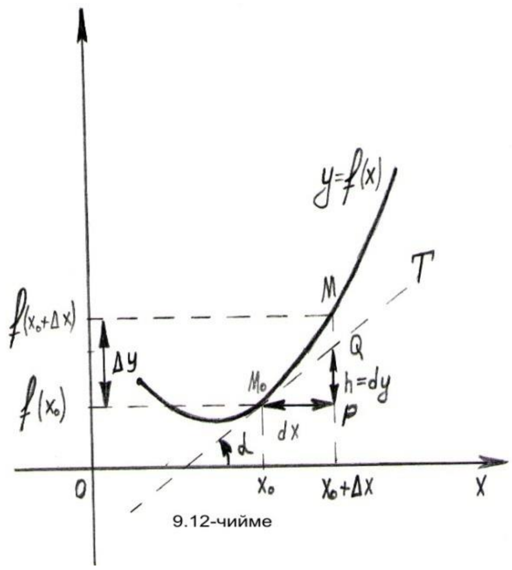
$$dy = f'(x)dx \qquad (9.7)$$

көрүнүшкө келтиребиз.

(9.5), (9.6) формулаларды салыштырып, x_0 *чекитиндеги функциянын дифференциалы, иш жүзүндө* $(x_0; y_0)$ *чекитинде* $y = f(x)$ *функциясын же ийрисин, жаныма түз сызыктын бөлүгү менен алмаштыруу амалы болорун көрөбүз (*$y_0 = f(x_0)$*).* Чынында эле (9.6) ны $\Delta y = f'(x_0)\Delta x$ же

$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ көрүнүштө жазып, анын $(x_0; y_0)$ чекитинен өтүүчү бурчтук коэффициенти $k = f'(x_0)$ болгон жаныма түз экендигине ишенебиз. Бирок $y = f(x)$ ийриси менен жаныма түздүн арасындагы теңдештик, $(x_0; y_0)$ чекитине чексиз жакын аймакчада гана аткарылып, функциялардын маанилерин жакындаштырып эсептөөгө мүмкүнчүлүк түзөт. Функциянын $x_0 + \Delta x$ чекитиндеги маанисин жакындаштырып эсептөөдө, (9.6) ны

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \qquad (9.6)^*$$



9.12-чийме

көрүнүштө жазып колдонуу ыңгайлуу.

- Функциянын чекиттеги дифференциалын геометриялык жактан чечмелейли: Айталы, $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде дифференцирленүүчү болсун. Макулдашылгандай Δx өсүндүсүн dx деп белгилеп, x_0 чекитине $x_0 + dx$ өсүндүсүн берели, анда бул чекитте үзгүлтүксүз болгон $f(x)$ функциясы да тиешелүү Δy өсүндүсүнө козголот (9.12 – чийме). Натыйжада, функциянын графигинде жайгашкан $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекити $\mathrm{M}(x_0 + dx; f(x_0 + dx))$ чекитине которулат. Функциянын графигине M_0 чекитинен Т жаныма түзүн жүргүзө алабыз, анткени анын бурчтук коэффициентин (7.14) түн негизинде $k_{\mathrm{T}} = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$ табуу мүмкүн. 9.12 – чиймеден $\Delta \mathrm{M}_0\mathrm{MP}$ тик бурчтуу үч бурчтугун карап $|\mathrm{M}_0\mathrm{P}| = \Delta x = dx$, $|\mathrm{MP}| = \Delta y$ болорун байкайбыз. Т жаныма түзү менен МР кесиндисин кесилишин Q деп белгилеп, $dy = |\mathrm{PQ}|$ экендигин көрөбүз.

Ошентип $f(x)$ тин x_0 чекитиндеги dy дифференциалы, анын графигине $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекитинде жүргүзүлгөн Т жанымасын: абциссасы x_0 чекитиндеги абалынан, абциссасы $x_0 + dx$ өсүндүсүнө которулгандан кийинки көтөрүлүү (төмөндөө) деңгээлин аныктаган, $h = |\mathrm{PQ}| = dy$ бийиктиги болот.

- Жогорудагы 9.1.1 – теманын натыйжасында айтылгандай x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгон функция, бул чекитте ар дайым эле дифференцирленүүчү боло бербейт, бирок тескерисинче дифференцирленүүчү функция сөзсүз бул чекитте үзгүлтүксүз болот. Чынында эле функциянын чекиттеги үзгүлтүксүздүгүн өсүндүлөр тилиндеги аныктамасына таянып, дифференцирленүүчү функциянын өсүндүсүн (9.5) көрүнүштө жаза алабыз $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)\Delta x$.

Дифференцирленүүчүлүктүн шарты боюнча $f'(x_0)$ чектүү сан болгондуктан, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = f'(x_0)\cdot 0+0=0$ пределин мааниси нөлгө барабар болуп, функциянын үзгүлтүксүздүгүн өсүндүлөр тилиндеги аныктамасы $\Delta x\to 0 \Rightarrow \Delta y\to 0$ аткарылгандыктан, $f(x)$ тин x_0 чекитинде үзгүлтүксүздүгү келип чыгат.

5. Мисалдар

1) $y = x^2 - x + 3$ функциясын $x_0 = 2$ чекитиндеги дифференциалын эки ыкма менен көрсөтөлү: а) функциянын өсүндүсүн сызыктуу бөлүгүн алып; б) (9.6) формуласы боюнча.

Чыгаруу:▶ а) $\Delta y = f(2+\Delta x) - f(2) = [(2+\Delta x)^2 - 2(2+\Delta x) + 3] - [2^2 - 2 + 3] = 3\Delta x + (\Delta x)^2$ функциянын брилген чекиттеги өсүндүсүн таап, анын жогорку тартиптеги чексиз кичине $(\Delta x)^2$ – бөлүгүн таштап жиберсек, $dy = 3\Delta x$ ээ болобуз.

б) Функциянын $f'(x) = 2x - 1$ туундусунун $x_0 = 2$ чекитиндеги $f'(2) = 3$ маанисин (9.6) формуласына койсок $dy = 3dx$ келип чыгат.◀

2) $y = \sin(x)^2$ функциясын: а) $x_0 = \sqrt{\pi}$ чекитиндеги,

б) $dx = -2$ болгон кезде $x_0 = \sqrt{\pi}$ чекитиндеги дифференциалдарын тапкыла.

Чыгаруу:▶ $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot dx = \cos(x_0)^2 \cdot 2x_0 dx$ болгондуктан :

а) $x_0 = \sqrt{\pi}$ маанисин коюп, $dy|_{x_0=\sqrt{\pi}} = \cos\pi \cdot 2\sqrt{\pi}\,dx = -2\sqrt{\pi}\,dx$;

б) $dx = -2$ десек, $dy|_{\substack{x_0=\sqrt{\pi},\\ dx=-2}} = \left(-2\sqrt{\pi}\right)\cdot(-2) = 4\sqrt{\pi}$ коюлган талапты аткарган болобуз.◀

3) Функциянын өсүндүсүн дифференциал менен алмаштырып, төмөндөгү чоңдуктарды жакындаштырып эсептегиле: а) $\sqrt{0{,}98}$; б) $\sin 31^\circ$.

Чыгаруу:▶ а) $y = \sqrt{1+x}$ функциясын алалы. $y(0) = 1$, $y(-0{,}02) = \sqrt{0{,}98}$ болгондуктан $x_0 = 0$, $\Delta x = -0{,}02$ деп алып, (9.6)* формуласын пайдаланалы. Функциянын $y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ туундусун $x_0 = 0$ чекитиндеги маанисин $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$ таап, (9.6)* нын негизинде

$$y(-0{,}02) = \sqrt{0{,}98} \approx \ y(0) + \ y'(0) \cdot \Delta x = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}02) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

жообун алабыз.

б) $y = \sin x$ функциясын алып $x_0 = 30°$ десек, анда $\sin 30° = \frac{1}{2}$,

$y'(30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\Delta x = 1° = \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}0175$ радиан маанилерин (9.6)* га коюп,

$$\sin 31° = \sin(30° + 1°) = \sin 30° + \cos 30° \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360} \approx 0{,}5151$$

ээ болобуз.◄

9.2.2 Функцияларды дифференцирлөө эрежелери

Функцияны дифференцирлөө же чектүү туундусун табуу, иш жүзүндө (9.1) же (9.2) пределдерин эсептөө ыкмалары менен аныкталгандыктан, дифференцирлөө эрежелери толугу менен пределди эсептөө эрежелеринен келип чыгат. Айталы $u(x)$ жана $v(x)$ функцияларын x чекитинде дифференцирленүүчү болуп, тиешелүү түрдө чектүү $u'(x)$ жана $v'(x)$ туундулары жашасын, анда туунду алуунун төмөндөгү эрежелери кабыл алынат:

$$\left(c \cdot u(x)\right)' = c \cdot u'(x) \text{ мында } c - \text{const}, \qquad (9.8)$$

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x), \qquad (9.9)$$

$$\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \qquad (9.10)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0. \qquad (9.11)$$

Далилдөө.► Функциядан туунду алуунун (9.8) эрежеси (9.1), (9.2) пределдерин эсептөөдө турактуу санды пределдин белгисинин алдынан чыгарып салуу мүмкүн деген касиеттин негизинде кабыл алынган. Чындыгында эле (9.1) ден

$\left(c\cdot u(x)\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x+\Delta x)-c\cdot u(x)}{\Delta x} = c\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = c\cdot u'(x)$ келип чыгат. Чектүү сандагы функциялардын суммасын, айырмасын пределдери, алардын пределдерин суммасына, айырмасына барабар болгондуктан, (9.9) нын да туура

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)' == \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)-(u(x)\pm v(x))\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm$$

$\pm\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)\pm v'(x)$ экендигин көрөбүз. Бул эреже чектүү сандагы функциялардын суммасы, айырмасы үчүн туура болот.

(9.10) ду далилдейли:▶ $u(x), v(x)$ функциялары x чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан, бул чекитте үзгүлтүксүз функциялар болушуп, чектүү сандагы үзгүлтүксүз функциялардын көбөйтүндүсү катарында $y = u(x)\cdot v(x)$ функциясы да үзгүлтүксүз болот. Андай болсо аргумент Δx өсүндүсүн алса, функция да тиешелүү

$\Delta y = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)$ өсүндүсүнө ээ болот.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-v(x+\Delta x)u(x)+v(x+\Delta x)u(x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x} =$$

$= v(x+\Delta x)\cdot\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$ теңдештигине ээ болобуз. Анда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = u'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = v'(x)$ болгондуктан,

$\left(u(x)\cdot v(x)\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ келип чыгып, көбйтүндүн туундусу (9.10) эрежеси менен эсептелерин көрөбүз. Көбөйтүндүдөн туунду алуунун (9.10) эрежеси Лейбництин формуласы деп аталып, чектүү сандагы функциялардын көбөйтүндүсү үчүн да жайылтууга болот. ◀

(9.11) ди далилдейли: ▶ x чекитинде $u(x), v(x)$ дифференцирленүүчү жана $v(x)\neq 0$ болгондуктан, алардын катышы болгон $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ функциясы да, бул чекитте дифференцирленүүчү функциялардын катышы катарында үзгүлтүксүз болот. Ошондуктан x чекитин жакынкы чеке белинде $v(x+\Delta x)\neq 0$ абалын сактап калып,

$\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$ функциясы аргументке жетишерлик кичине $|\Delta x|$ өсүндүсүн берген кезде аныкталган жана үзгүлтүксүз бойдон кала берет ($|\Delta x|=\pm\Delta x$, оң жана сол багыттар эске алынат). $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ функциясына x чекитинде Δx өсүндүсүн берип, жалпы бөлүмгө келтирсек, анда $\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v^2+v\Delta v}$ теңдештигине ээ болобуз. Мындан

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}$ болорун билип, $u'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $v'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$ жана v нын үзгүлтүксүздүгүнөн $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v\Delta v=0$ экендигин эске алып, бөлчөк функциянын туундусун эсептөөчү

$$y'=\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\Delta v}=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

(7.11) эрежесин туура болоруна ишенебиз. ◀

Мисалдар

1) $y=\operatorname{ctg}x\cdot\sin x$ функциясын туундусун табалы.

$$(\operatorname{ctg}x\cdot\sin x)'=(\operatorname{ctg}x)'\cdot\sin x+\operatorname{ctg}x\cdot(\sin x)'=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\sin x+\operatorname{ctg}x\cdot\cos x=-\frac{1}{\sin x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x}=-\frac{1-\cos^2 x}{\sin x}=-\sin x.$$

2) $y=\frac{x^3}{x^5+2x-1}$ бөлчөк функциянын туундусун (9.11) формуласы боюнча эсептейли $\left(\frac{x^3}{x^5+2x-1}\right)'=\frac{(x^3)'\cdot(x^5+2x-1)-(x^5+2x-1)'\cdot x^3}{(x^5+2x-1)^2}=$

$$=\frac{3x^2\cdot(x^5+2x-1)-(5x^4+2)\cdot x^3}{(x^5+2x-1)^2}=\frac{-2x^7+4x^3-3x^2}{(x^5+2x-1)^2}\ .$$

9.2.3 Татаал функцияны дифференцирлөө

Татаал функциянын үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү 8.2 – теоремага (8 – гл.) таянып, татаал функциядан чекитте туунду алуу процессин төмөндөгү теоремада иштелип чыккан эреже боюнча жүргүзөбүз.

9.1 Теорема. *Эгерде* $u=\varphi(x)$ *функциясы* x_0 *чекитинде дифференцирленүүчү болсо жана* $y=f(u)$ *функциясы тиешелүү* $u_0=\varphi(x_0)$ *чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда* $y=f(\varphi(x))$ *татаал функциясы* x_0 *чекитинде дифференцирленүүчү болуп, анын туундусун мааниси*

$$\{f(\varphi(x))\}'\Big|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0) \qquad (9.12)$$

эрежеси боюнча табылат.

Далилдөө:▶ Дифференцирленүүчү чекитте функция сөзсүз үзгүлтүкүз болгондуктан, $x=x_0$ чекитине $\Delta x\neq 0$ өсүндүсүн берсек, анда $u=\varphi(x)$ функциясы тиешелүү Δu өсүндүсүнө ээ болот. Өз кезегинде Δu өсүндүсү $u_0=\varphi(x_0)$ чекитинде үзгүлтүксүз болгон $y=f(u)$ функциясын да козгоп, Δy өсүндүсүн алууга мажбурлайт. Теореманын шарты боюнча $y=f(u)$ функциясы u_0 чекитинде дифференцирленүүчү болгондуктан, аны (9.5) ти пайдаланып,

$$\Delta y=f'(u_0)\,\Delta u+\mathrm{o}(\Delta u)\Delta u \qquad (9.13)$$

көрүнүштө жазууга болот. (9.13) теңдештигин эки жагын тең $\Delta x\neq 0$ өсүндүсүнө бөлүп жиберсек, анда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u_0)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\mathrm{o}(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (9.14)$$

келип чыгат. Мындан $\Delta x\to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк, x_0 чекитинде дифференцирленүүчү функция катарында $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x_0)$ туундусуна ээ болот. Демек (9.14) теңдештигин оң жагы

$\Delta u\to 0\Leftrightarrow \mathrm{o}(\Delta u)\to 0$ болгондуктан, чектүү $f'(u_0)\cdot u'(x_0)$ пределине ээ

болот. Анда сол жагынын $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\{f(\varphi(x))\}'\Big|_{x=x_0}$ предели да ага барабар болуп, (9.12) теңдештиги орун алат.◀

9.1 – теореманын шарттарын канааттандырган бардык x чекиттеринде $y = f(u) = f(\varphi(x))$ татаал функциясынан x өзгөрүлмөсү боюнча туунду алуунун же дифференцирлөөнүн (9.12) эрежесин

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ же } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (9.15)$$

көрүнүштө жазып эстөө жана колдонуу ыңгайлуу болот.

Мисалы $y = a^{x^3}$ функциясы $u = x^3$, $y = a^u$ болуп, x өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция болот ($a > 0, a \neq 1$). Жогоруда 9.1.1 деги 2) – мисалда табылгандай $y'_u = (a^u)' = a^u \ln a$, ал эми

$u'_x = (x^3)' = 3x^2$ болгондуктан, (9.15) эрежеси боюнча татаал функциянын туундусун $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3x^2 \cdot a^{x^3} \ln a$ эсептеп чыгабыз.

- Татаал функцияны дифференцирлөөдө дифференциалдын жазылуу формасы сакталат. Математикада аны **дифференциалдын инварианттуулугу** деп коюшат. Чынында эле x_0 чекитинде $y = f(u) = f(\varphi(x))$ татаал функциясы 9.1 – теореманын шарттарын канааттандырса, анда анын $u_0 = \varphi(x_0)$ чекитиндеги өсүндүсүн (9.13) көрүнүштө $\Delta y = f'(u_0)\ \Delta u + \mathrm{o}(\Delta u)\Delta u$ жаза алабыз. 9.3 – аныктамасы боюнча анын башкы бөлүгү, функциянын u_0 чекитиндеги дифференциалы деп аталып,

$$dy = f'(u_0)du \qquad (9.16)$$

көрүнүштө жазылат. Эгерде u өзгөрүлмө аргумент болсо, анда $\Delta u = du$ белгилөөлөрүн алмаштырып (9.16) дифференциалын жазабыз. Ал эми u аргумент болбой x_0 чекитинде дифференцирленүүчү $u = \varphi(x)$ көрүнүштөгү функция болсо, анда du дегенибиз 9.3 – аныктамасын негизинде анын x_0 чекитиндеги $\Delta u = \varphi'(x_0)\Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$ өсүндүсүн башкы бөлүгү катарында $du = \varphi'(x_0)dx$ көрүнүштө жазылууга тийиш. Аны (9.16) га коюп, таaал функциянын дифференциалын жазылуу

$$dy = f'(u_0)\varphi'(x_0)dx = \left\{ \left[f(\varphi(x)) \right]' \Big|_{x = x_0} \right\} \cdot dx \qquad (9.17)$$

эрежесин келтирип чыгарабыз. Фиксирленбеген эркин x чекитинде (9.17) формуласы

$dy = f'(u) \cdot \varphi'(x)dx$ көрүнүштө жазылат.

Функциянын чекиттеги дифференциалын жазуунун (9.6), (9.16), (9.17) көрүнүштөрүн салыштырып көрүп, алардын бардыгында кайсы өзгөрүлмө боюнча дифференциалын жазып жатсак, оболу функциянын ошол өгөрүлмө боюнча сөз кылынган чекиттеги туундусун маанисин жазып, ага ошол өзгөрүлмөнүн дифференциалын көбөйтүп койгон ырааттуулук сакталганын ***же дифференциалдын инварианттуулугун байкайбыз.***

9.2.4 Тескери функциянын туундусу

Айталы, Оx огундагы $[a, b]$ туюк аралыгында тескери функциянын жашоо шарттарын (6 – гл., 6.1.4) канааттандырган $y = f(x)$ функциясы берилип, анын маанилерин көптүгү $0y$ огундагы $[c, d]$ туюк аралыгын толтурсун. Берилген аралыкта монотондуу үзгүлтүксүз функциянын тескери функциясы жашап, ал да монотондуу жана үзгүлтүксүз болот (8 – гл., 8.2.1) деген натыйжага таянып, $[c, d]$ көптүгүндө ага тескери болгон монотондуу жана үзгүлтүксүз $x = x(y) = f^{-1}(y)$ функциясын аныктоо мүмкүн. Тескери функциянын туундусун эсептөө эрежесин келтирип чыгаралы.

9.2 Теорема. *Эгерде* $y = f(x)$ *функциясы кайсы бир* x_0 *чекитинин жакынкы чеке белинде үзгүлтүксүз жана монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болуп,* x_0 *чекитинде нөлдөн айырмалуу* $f'(x_0) \neq 0$ *туундусу жашаса, анда ага тескери болгон* $x = x(y) = f^{-1}(y)$ *функциясын* $y_0 = f(x_0)$ *чекитиндеги туундусу жашап,*

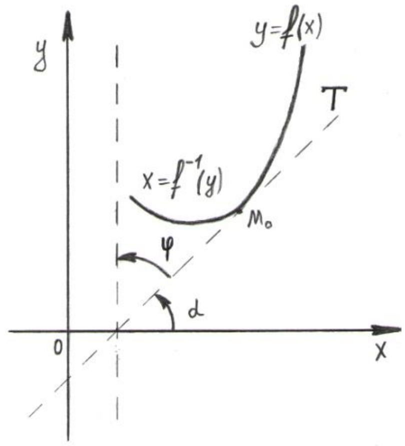
$$x'_y = x'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \textit{же} \quad \{f^{-1}(y)\}'_y\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} \qquad (9.18)$$

эрежеси менен эсептелет.

Далилдөө. ► Берилген теореманын шарттарында $y = f(x)$ функциясына тескери болгон $x = x(y)$ функциясы жашап, y_0 чекитин жакынкы чеке белинде үзгүлтүксүз жана монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болот (8 – гл., 8.2.1). Ошондуктан y_0 чекитине Δy өсүндүсүн $y_0 + \Delta y$ берсек, анда тескери функция тиешелүү козголууга же өсүндүгө $\Delta x = x(y_0 + \Delta y) - x(y_0)$ ээ болот. Тескери функция да монотондуу болгондуктан, ал тынымсыз кыймылда (өсүүдө же кемүүдө) болуп, $\Delta y \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta x \neq 0$ болот. Демек $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ катышын $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ көрүнүштө жаза алабыз. Ошондой эле, оң жана тескери функциялардын экөөсүнүн тең тиешелүү чекиттердин жакынкы чеке белинде үзгүлтүксүз функциялар экендигинен $\Delta y \to 0 \;\Leftrightarrow\; \Delta x \to 0$ тең күчтүүлүгү келип чыгып, алар нөлгө умтулгандагы пределге өтүү менен,

$\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'(y_0) = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}$ өз ара тескери $y = f(x)$, $x = x(y)$ функцияларын чекиттеги туундусун эсептөөчү (9.18) эрежесин тууралыгын көрөбүз.◄

Эгерде каралган аралыктардагы бардык x жана y чекиттеринде өз ара тескери $y = f(x)$, $x = x(y)$ функциялары далилденген 9.2 - теореманын шарттарын канааттандырышса, анда алардын бул чекиттердеги туундулары



9.13-чийме

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad (y'_x \neq 0) \text{ жана}$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (x'_y \neq 0) \qquad (9.19)$$

байланыштарында болушат.

∘ Геометриялык жактан x_0 чекитинде чектүү $f'(x_0) \neq 0$ туундусун жашашы, $y = f(x)$ тин графигине $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекитинде Оx огуна параллель болбогон Т жаныма түзүн жүргүзүү мүмкүн дегенди түшүндүрөт (9.13 – чийме). Ал эми 9.2 – теоремадан келип чыккан (9.18) эрежеси, ошол эле Т жанымасын, кайрадан тескери $x = x(y) = f^{-1}(y)$ функциясын графигине M_0 чекитинен жүргүзүлгөн жаныма болорун ырастайт. Чынында эле өз ара тескери $y = f(x)$, $x = x(y)$ функцияларын графиктери бир эле ийри сызык болуп, Т жаныма түзүнүн бурчтук коэффициенти $k_T = \mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$ көрүнүштө болгон. Мында α деп, Оx менен Т түзүн арасындагы бурчту белгилегенбиз. Айталы, Т жаныма түзү Оy огу менен φ бурчун түзсүн, анда $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$ болот. (9.18) – эрежени пайдаланып,

$$x'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \varphi)} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\varphi} = \mathrm{tg}\varphi$$

теңдештигине ээ болобуз. Ошентип $\mathrm{tg}\varphi$ санын, $x(y)$ тескери функциясы аныкталган Оy огуна карата жаныманын бурчтук коэффициенти деп эсептейбиз. Демек, өз ара тескери $y = f(x)$, $x = x(y)$ функцияларын тиешелүү x_0 жана $y_0 = f(x_0)$ чекиттериндеги туундулары, аларга жалпы график болгон ийриге $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекитинде жүргүзүлгөн бир Т жаныма түзүнүн, тиешелүү түрдө Оx, Оy координаттык октору менен түзгөн бурчтардын тангенстерине барабар болушат. *Бирок Т жаныма түзү Оx огуна ($y'_x \neq 0$) жана Оy огуна ($x'_y \neq 0$) параллель эмес болгон учурларда гана (9.19) байланыштары орун аларын эске тутуубуз керек.*

Өз ара тескери функциялардын туундуларын эсептөөгө мисал катарында, өз ара тескери $y = sinx$, $y = arcsinx$ функцияларын туундуларын табууну көрсөтөлү. $y = sinx$ оң функциясын аныкталуу областы $]-\infty, +\infty[$ аралыгы, ал эми өзгөрүү областы $[-1, 1]$ аралыгы болот. Бул өз ара тескери элементардык функциялардын экөөсү тең өз аныкталуу областарында үзгүлтүксүз болушкандыктан, аргументтин $x + \Delta x$ козголуусуна же өсүндүсүнө функция $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - sinx$ өсүндүсү менен жооп берет. Синустардын айырмасын формуласын

$\sin(x + \Delta x) - sinx = 2sin\frac{\Delta x}{2}cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ пайдаланып,

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ алабыз. $\Delta x \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{2} \to 0$ экендигин эске алып, функциядан туунду алуунун (9.1) эрежесин негизинде, 1 – сонун пределди колдонуп,

$$(sinx)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right\} = \lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot$$

$\cdot \lim_{\Delta x\to 0} cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot cosx = cosx$ туундусуна ээ болобуз.

Тескери функциядан туунду алуунун жалпыланган (9.19) эрежесин пайдаланып, $y = arcsinx$ тескери функциясын туундусун табайлы. Тескери функцияны табуунун 2) – эрежеси боюнча $y = sinx$ теңдештигин x ке карата чыгарып, $x = \arcsin y = x(y)$ функциясын табабыз. Анын аныкталуу областы $y \in [-1,\ 1]$, ал эми өзгөрүү областы $x \in]-\infty, +\infty[$ аралыктарына алмашып, аныкталуу областында 9.2 – теореманын шарттарын канааттандыргандыктан, $y = sinx$ экендигин эске алып, (9.19) дун негизинде

$(\arcsin y)'_y = x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(sinx)'_x} = \frac{1}{cosx} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ туундусуна ээ болобуз. Тескери функциянын кабыл алынган жазуу (6 – гл., 6.1.4) эрежесине ылайык, x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып жазып, $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ болорун көрөбүз.

§9.3 Элементардык функциялардын туундулары

9.3.1 Туунду алуунун таблицасы

Функциялардын туундусун табуу процесси же дифференцирлөө, (9.1) жана (9.2) пределдерин эсептөө менен ишке ашырылуучу узун процесс экендигин көрдүк. Мындай түйшүктүү иштен арылуу максатында, математикада кеңири колдонулган функциялардын туундуларын алдын ала эсептеп чыгып, алардын даяр таблицасын түзүп, же муктаждыкка жараша эстеп калып, туундунун таблицасына жана туундунун касиеттерине таянган жаңы математикалык амалдарды иштеп чыгабыз. Ошолу негизги элементардык функциялардын туундуларын таблицасын түзүп көрөтөлү:

1. $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$ $(\forall\alpha\in R, x>0)$; 2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x>0)$;

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ $\quad (a > 0, a \neq 1, x > 0)$; $\quad$ 4. $(e^x)' = e^x$;

5. $(a^x)' = a^x \ln a$ $\quad (a > 0, a \neq 1)$; $\quad$ 6 .$(\sin x)' = \cos x$;

7. $(\cos x)' = -\sin x$;

8. $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{cos^2 x}$ $\quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \dots)$;

9. $(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{sin^2 x}$ $\quad (x \neq n\pi,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \dots)$;

10. $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$;

11. $(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (-1 < x < 1)$;

12. $(ar\mathrm{ctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $\quad$ 13. $(arc\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

14. $(shx)' = chx$; $\quad$ 15. $(chx)' = shx$;

16. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$; $\quad$ 17. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$ $(x \neq 0)$;

Туунду алуунун түзүлгөн таблицасынын туура экендигин, (9.1), (9.2) эрежелеринин жардамы менен текшерип көрөлү:

1. $y = x^\alpha$ функциясын аныкталуу областына таандык болгон x чекитиндеги туундусун эсептейли ($\forall\alpha \in R, x > 0$). Элементардык функциялар аныкталуу областтарында үзгүлтүксүз болушкандыктан, аргументке $x + \Delta x$ өсүндүсүн берип козгосок, анда функция да тиешелүү $\Delta y = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha$ козголуусуна же өсүндүсүнө ээ болот. (9.1) эрежеси боюнча (6.30) формуласын эске алып (же 8.1.4 төгү 3 - мисалдагы жалпыланышын),

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} \right\} = x^{\alpha-1} \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}} \right\} =$$

$$= x^{\alpha-1} \cdot \alpha = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

туундусуна ээ болобуз.

3. $y = \log_a x$ функциясын туундусун табалы $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$. Туунду алуунун (9.1) эрежеси боюнча предел эсептөөдө, чексиз кичине чоңдуктарды салыштыруунун (8.10) формулаларын эске алып,

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left[x \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\right] - \log_a x =$$

$= \log_a x + \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) - \log_a x = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ теңдештигин алабыз. Мындан

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$= \frac{\log_a e}{x} = \frac{1}{x \ln a}$ туундусуна ээ болобуз.

2. $y = \ln x$ функциясын туундусу $a = e$ болгон учурда $y = \log_a x$ функциясын туундусунан келип чыгат $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$;

5. $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$ функциясын туундусун 9.1.1 темасынын 3) – мисалында көрсөттүк $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$, Бул функциянын туундусун $y = \log_a x$ функциясына тескери функция катарында (9.19) эрежеси менен да эсептөөгө болот. Чынында эле логарифмалык функцияны x ке карата чыгарып, $x = x(y) = a^y$ тескери функциясын табабыз. Анын туундусу (9.19) формуласына ылайык,

$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\frac{1}{x \ln a}} = x \ln a = a^y \ln a$ болуп, x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырган соң $(a^x)' = a^x \ln a$, таблицадагы көрүнүшкө келет.

4. $y = e^x$ функциясын туундусу $a = e$ болгон учурда $y = a^x$ функциясын туундусунан келип чыгат $(e^x)' = e^x$;

6. $y = \sin x$ жана $y = arcsinx$ функцияларынын туундуларын 9.1.7 темасында эсептедик

$(\sin x)' = \cos x$; $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$;

7. $y = \cos x$ функциясын туундусун табалы. Берилген функция

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = 2\, sin\frac{(x+\Delta x)\ +x}{2} \cdot sin\frac{x-\ (x+\Delta x)}{2} =$$

$= 2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{-\Delta x}{2}\right)$ өсүндүсүнө ээ болуп, $\sin x$ так функция экенин эске алып, 1- сонун пределге таянып, анын

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{-\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot$$

$\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -sinx \cdot 1 = -sinx$ туундусун табабыз.

8. $y = \mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ болгондуктан, бөлчөктү дифференцирлөө формуласын пайдаланабыз. Мында $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$ деп эсептелет. Анда $(\mathrm{tg}x)$

$$' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(sinx)' \cdot \cos x - sinx \cdot (\cos x)'}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$ болот.

9. $y = \mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}$ болгондуктан ($x \neq n\pi,\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$),

$$(\mathrm{ctg}x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(cosx)' \cdot sinx - cosx \cdot (sinx)'}{sin^2 x} = \frac{-sin^2 x - cos^2 x}{sin^2 x} = -\frac{1}{sin^2 x}$$ келип чыгат.

11. $y = arccos\, x \quad (-1 < x < 1)$ функциясы $y = \cos x$ функциясына тескери функция болгондуктан, 9.2 – теореманын шарттарын канааттандырган аралыкта (9.19) эрежеси боюнча $x = arccosy$ функциясы

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(cosx)'} = -\frac{1}{sinx} = -\frac{1}{\sqrt{1-cos^2 x}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$ туундусуна ээ болот. Тескери функцияны жазуу эрежеси боюнча x, y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып,

$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$ жообуна ээ болобуз.

12. $y = arctgx$ функциясы $y = \mathrm{tg}x$ функциясына тескери функция болгондуктан, $x = arctgy$ функциясын туундусу 9.2 – теореманын шарттарында

$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2x}} = cos^2x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2x} = \frac{1}{1+y^2}$ көрүнүштө табылат.

x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, таблицадагы туундуну аныктайбыз $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$.

13. $y = arcctg\,x$ функциясы $y = ctg\,x$ функциясына тескери функция болуп, $x = arcctg\,y$ функциясын туундусу 9.2 – теоремада коюлган шарттар аткарылганда

$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{-\frac{1}{sin^2x}} = -\ sin^2x = -\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2x} = -\frac{1}{1+y^2}$ көрүнүштө табылат.

x менен y өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырган соң,

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$ ээ болобуз.

14. $y = shx$ функциясы $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ көрүнүштөгү көрсөткүчтүү функция болгондуктан, $(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}[(e^x)' - (e^{-x})'] =$

$= \frac{1}{2}[e^x - e^{-x} \cdot (-1)] = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$ көрүнүштөгү туундусу эсептелет.

15. $y = chx$ функциясы $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ көрүнүштөгү көрсөткүчтүү функция, ошондуктан,

$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}[(e^x)' + (e^{-x})'] = \frac{e^x + e^{-x}\cdot(-1)}{2} = \frac{e^x - e^x}{2} = shx$ туундусуна ээ болот.

16. $y = thx = \frac{shx}{chx}$ бөлчөк функция болгондуктан, $ch^2x - sh^2x = 1$ формуласын пайдаланып, бөлчөктөн туунду алуу эрежесин негизинде

туундуну $(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)' \cdot chx - shx \cdot (chx)'}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}$ көрүнүштө эсептейбиз.

17. $y = cthx = \frac{chx}{shx}$ бөлчөк болот, ошондуктан

$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{(chx)' \cdot shx - chx \cdot (shx)'}{sh^2 x} = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = \frac{-1}{sh^2 x}$ көрүнүштөгү туундусу табылат.

Негизги элементардык функциялардын туундуларын түзүлгөн таблицасынын жардамы менен, 9.1 – теореманын шарттарын канааттандырган элементардык функциялардын суперпозицияларынан турган, татаал функциялардын туундуларын (9.15) эреженин негизинде табууга болот.

1. $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ $(\forall\alpha \in R, u > 0)$; 2. $(\ln x)' = \frac{u'}{u}$ $(u > 0)$;

3. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ $(a > 0, a \neq 1, x > 0)$; 4. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

5. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$ $(a > 0, a \neq 1)$; 6 .$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8. $(\mathrm{tg}u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(u \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$;

9. $(\mathrm{ctg}u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ $(u \neq n\pi,\ n = 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \ldots)$;

10. $(arcsinu)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $(-1 < u < 1)$;

11. $(arccosu)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $(-1 < u < 1)$;

12. $(arc\mathrm{tg}u)' = \frac{u'}{1+u^2}$; 13. $(arc\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$;

14. $(shu)' = ch\, u \cdot u'$; 15. $(chu)' = shu \cdot u'$;

16. $(thu)' = \frac{u'}{ch^2 u}$; 17. $(cth\, u)' = -\frac{u'}{sh^2 u}$ $(u \neq 0)$;

Ошентип, бүтүндөй элементардык функциялардын классынан туунду алуу практикасында (9.1), (9.2) эрежелерин тике колдонбой, алардын негизинде туунду алуунун жогоруда түзүлгөн даяр эки таблицасын колдонуп, аларды **предел аппараты менен түзүлгөн жаңы математикалык амал катарында** кабыл алып, алгебралык теңдеш өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен, бардык туундуларды таблицалык көрүнүшкө келтирип эсептейбиз.

Мисалдар: 1) $\left(\sqrt{x}\right)' = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $\left(5^{\sin x}\right)' = |u = \sin x| = \ (5^u)' = 5^u \ln 5 \cdot u' = \ln 5 \cdot \ 5^{\sin x}\, cosx$;

3) $\left(\sin\sqrt[3]{1-x^2}\right)' = cos\sqrt[3]{1-x^2} \cdot \left(\sqrt[3]{1-x^2}\right)' = cos\sqrt[3]{1-x^2} \cdot \left[(1-x^2)^{\frac{1}{3}}\right]' =$

$\cos\sqrt[3]{1-x^2} \cdot \frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (1-x^2)' = \frac{1}{3}\ cos\sqrt[3]{1-x^2}\,\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}} \cdot (-2x) =$

$= \frac{-2x\, cos\sqrt[3]{1-x^2}}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$;

4)
$\left((sinx^4 + 3x) \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x^2-4}\right)' = (sinx^4 + 3x)' \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x^2-4} + \ +(sinx^4 + 3x) \cdot$
$\left(\mathrm{tg}\sqrt{x^2-4}\right)' = (cosx^4 \cdot (x^4)' + 3) \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x^2-4} + \ (sinx^4 + 3x) \cdot \frac{1}{cos^2\sqrt{x^2-4}} \cdot$

$\cdot\left(\sqrt{x^2-4}\right)' = (cosx^4 \cdot 4x^3 + 3) \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x^2-4} + \ (sinx^4 + 3x) \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2-4}}}{cos^2\sqrt{x^2-4}} \cdot$

$\cdot (x^2-4)' = (4x^3 cosx^4 + 3)\ \mathrm{tg}\sqrt{x^2-4} + \frac{x(sinx^4+3x)}{\sqrt{x^2-4} \cdot cos^2\sqrt{x^2-4}}$;

9.3.2 Логарифмалык дифференцирлөө

Татаал функциянын туундусун табуу учурунда логарифмалык пределдерди (Гл. 8, (8.10*)) колдонуу ыңгайлуу болгон учурлар кездешет. Бул учурларда логарифмалык дифференцирлөө деп аталган төмөндөгүдөй ыкманы колдонуу ыңгайлуу. Айталы, $y = f(x) > 0$ оң функциясын дифференцирлөөгө караганда $\varphi(x) = \ln f(x)$ функциясын дифференцирлөө жеңил болсун дейли. Берилген $y = f(x)$ функциясынан натуралдык логарифм алуу менен, $\ln y = \ln f(x)$ теңдештигине ээ болобуз. Аны $\ln y = \varphi(x)$ көрүнүшүнө келтирип, y ти x тен функция деп эсептеп, x өзгөрүлмөсү боюнча татаал функция сыяктуу туунду алсак,

$\frac{y'}{y} = \varphi'(x)$ келип чыгып, мындан

$$y' = y \cdot \varphi'(x) = f(x) \cdot [\ln f(x)]' \qquad (9.20)$$

көрүнүштөгү логарифмалык дифференцирлөө эрежесине ээ болобуз.

$u(x) > 0$ жана $u(x),\ v(x)$ дифференцирленүүчү функциялар болгон учурда (9.20) эрежени $y = u(x)^{v(x)}$ сыяктуу даражалуу – көрсөткүчтүү функциялардын туундуларын табууда колдонуу ыңгайлуу болот. Чынында эле натуралдык логарифм алып, $\ln y = v(x) \ln u(x)$ теңдештигин x боюнча дифференцирлесек,

$\frac{y'}{y} = v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)}$ же

$$y' = u(x)^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + v(x) \frac{u'(x)}{u(x)} \right) \qquad (9.21)$$

теңдештигине ээ болуп, $y = u(x)^{v(x)}$ даражалуу – көрсөткүчтүү функцияны дифференцирлөө процессин же туундусун алууну бир топ жеңилдеткен болобуз.

Мисалы $y = (\sin x)^x$ функциясынан туунду алалы. Берилген мисалда $u(x) = \sin x$ ($\sin x > 0$ болгон чекиттерде), $v(x) = x$ болот. (9.21) дин негизинде

$$y' = (\sin x)^x \left[(x)' \cdot \ln|\sin x| + \ x \cdot \frac{(\sin x)'}{\sin x} \right] = (\sin x)^x \cdot [\ln|\sin x| + x \cdot ctg\ x]$$

туундусуна ээ болобуз.

§9.4 Жогорку тартиптеги туундулар

9.4.1 Функциянын туундусунан кайра туунду алуу

Айталы $]a,\ b[$ интервалын ар бир x чекитинде $y = f(x)$ функциясын $f'(x)$ туундусу жашасын, анда $f'(x)$ функциясы деле $]a,\ b[$ интервалында, өзүнчө аныкталган функция болуп калышы мүмкүн. Эгерде ушул интервалдын ар бир x чекитинде $f'(x)$ үзгүлтүксүз функция болуп, 9.1 – аныктаманын шарттарын канааттандырса, анда (9.1), (9.2) эрежелерин пайдаланып, $f'(x)$ функциясынан x чекитинде $(f'(x))'$ туундусун эсептөөгө болот. Иш жүзүндө бул туунду, алгачкы $y = f(x)$ функциясынан x чекитинде алынган экинчи жолку туунду болуп калат. Ошондуктан, аны $f(x)$ тен алынган экинчи тартиптеги туунду деп атап, y'', $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ көрүнүштөрүндө белгилейбиз, б.а. $(f'(x))' = f''(x)$.

Каралган x чекитинде $f''(x)$ функциясы да 9.1 – аныктаманын шарттарын канааттандырса, анда бул чекитте анын да туундусун алуу мүмкүнчүлүгүнө ээ болобуз. $f(x)$ функциясынан үчүнчү жолу алынып жаткан туунду, үчүнчү тартиптеги туунду деп аталып $(f''(x))' = f'''(x)$, көрүнүштөрдө жазылат. Туундулардын кийинки тартиптерин Рим цифраларында y^{IV}, y^{V}, y^{VI} көрсөтүп, андан жогорку тартиптеги туундуларды кашаа ичиндеги натуралдык сандар менен көрсөтүү ыңгайлуу. Мисалы, $n-$ тартиптеги туундуну $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ көрүнүштөрдө жазууга болот.

Ошентип туундулары 9.1 – аныктамасын шарттарын канааттандырган функциялардан, 1 – тартиптеги туундусунан баштап улам кийинки жогорку тартиптеги туундуларды ала берүүгө болуп, жалпы учурда $n-$ тартиптеги туундуга чейин $\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = f^{(n)}(x)$ жетүүгө болот. Мындай туунду алуу процессин зарыл болгон тартипке чейин уланта берүүгө болот.

Мисалы төмөндөгү функциялардын каалаганчалык же чексизге чейинки жогорку тартиптеги туундуларын эсептөөгө болот, анткени алардын ар бири жана алардын ар кандай тартиптеги туундулары, $]-\infty,+\infty[$ аралыгында 9.1 – аныктамасынын шарттарын канааттандырышып, улам кийинки тартиптеги туундуларын алууга болот:

1) $y = e^{kx}$ $(k - const.)$ функциясын жогорку тартиптеги туундулары

$(e^{kx})' = ke^{kx}$, $(e^{kx})'' = k^2e^{kx}$, $(e^{kx})^{(3)} = k^3e^{kx}$, . . . , ж.б.у.с.

$(e^{kx})^{(n)} = k^ne^{kx}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ көрүнүштөрдө болушат.

2) $y = \sin x$ функциясынан n –тартиптеги туунду алалы.

$(\sin x)' = cosx = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$(\sin x)'' = (cosx)' = -sinx = sin(x + \pi) = sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

$(\sin x)^{(3)} = (-\sin x)' = -cosx = sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, . . . ж.б.у.с., туунду алуу процессин улантып олтуруп, математикалык индукция усулуна таянып, $y = \sin x$ функциясынын n тартиптеги туундусун

$(\sin x)^{(n)} = sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $(n \in N)$ көрүнүштө табабыз.

3) Ошондой эле $y = cosx$ функциясын n –тартиптеги туундусун да эсептөөгө болот. Чынында эле $(cosx)' = -sinx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$(cosx)'' = (-sinx)' = -cosx = \cos(x + \pi) = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

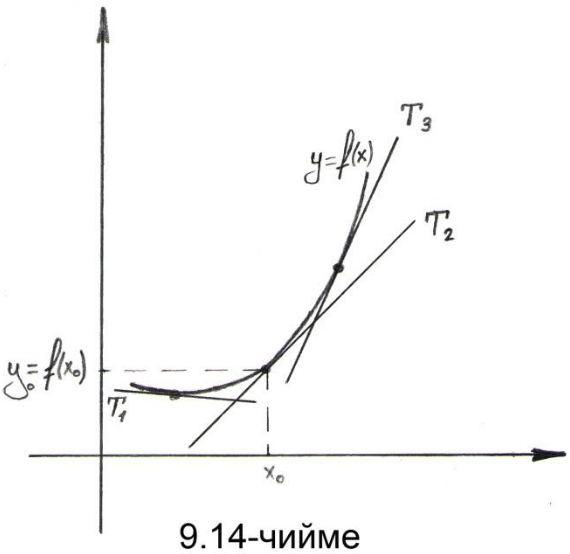
$(cosx)''' = (-cosx)' = sinx = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

....

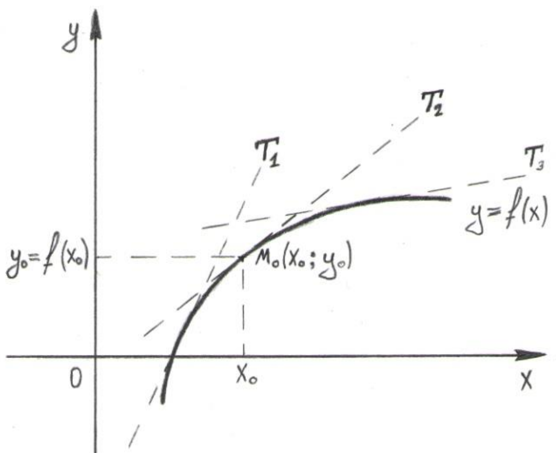
$(cosx)^{(n)} = cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ $(\forall n \in N)$ каалагандай тартипке чейинки туундусун эсептөөчү универсалдуу формулага ээ болобуз.

- Механикалык жактан $f(x)$ функциясын туундусу x чекитиндеги функциянын өсүү ылдамдыгын, же болбосо $s = s(t)$ эреже – мыйзамы (функциясы) менен кыймылдап бара жаткан нерсенин, убакыттын t ирмеминдеги (көз ачып, жумганчалык) ылдамдыгын $v = s'(t)$ түшүндүргөн. Экинчи тартиптеги туунду ылдамдыктан t убактысы боюнча алынган биринчи тартиптеги туунду катарында $v' = s''(t)$ эсептелип, ылдамдыктын убакытка жараша өзгөрүү ылдамдыгын же нерсенин ылдамдануусун сүрөттөйт. Ошентип жолдон убакыт боюнча алынган биринчи тартиптеги туунду – кыймылдагы нерсенин убакыттын t ирмеминдеги ылдамдыгын, ал эми экинчи тартиптеги туундусу ошол ирмемдеги ылдамдануусун түшүндүрөт.

- Геометриялык жактан x_0 чекитиндеги экинчи тартиптеги туунду, функциянын графигин $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекитиндеги иймейүү багытын (иймек же томпок) көрсөтөт. Чынында эле $f'(x_0) > 0$ болсо x_0 чекитин жакынкы чеке белинде фунция



9.14-чийме



9.15-чийме

монотондуу өсүүчү, ал эми $f'(x_0) < 0$ болсо монотондуу кемүүчү болуп, f''(x) туундусу $f(x)$ тин графигин $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекитиндеги жантаюу иймектигин жогору же төмөн карай багытталганынан кабар берет. Экинчи тартиптеги $f''(x_0)$ табылса, ал

$f(x)$ тин графигин $\mathrm{M}_0(x_0; f(x_0))$ чекитиндеги жантаюу иймейүүсүн ылдамдыгын түшүндүрөт. $f'(x_0)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, пределге өтүп экинчи тартиптеги туундусун эсептөө процессинде белгисин сактайт, б.а. $f''(x_0)$ оң болсо, x_0 чекитин жакынкы чеке белинде монотондуу өсүп, $f(x)$ тин графиги T жаныма түзүн үстүндө жайгашып иймек (9.14 – чийме), ал эми $f''(x_0)$ терс болсо, $f'(x_0)$ функциясы монотондуу кемүүчү болуп, $f(x)$ тин графиги T жаныма түзүнүн төмөн жагында жайгашып томпок (9.15 – чийме) болот.

9.4.2 Функциялардын көбөйтүндүсүнөн жана суммасынан жогорку тартиптеги туунду алуу эрежелери

Функциянын жогорку тартиптеги туундулары 9.1 – аныктамасын негизинде, улам кийинки жогорку тартиптеги туундусун табуу, мурдагы туундусуна карата (9.1) же (9.2) пределдерин эсептөө менен ишке ашырылгандыктан, туунду алуунун бардык касиеттери сакталып (пределдердин касиетин негизинде), элементардык функциялардан туунду алуу таблицасы колдонула берилет. Ошондой болсо да, жогорку тартиптеги туундуларды эсептөөдө, ал касиеттер менен ыкмалардын кайталана берүүсүнөн пайдаланып, ал касиеттерди жалпылоочу жаңы эрежелерди иштеп чыгууга болот.

- Мисалы $y = u(x) \cdot v(x)$ функциясын $n-$ тартиптеги туундусун эсептөө эрежесин келтирип чыгалы :

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x)v'(x)$;

$$(u(x) \cdot v(x))'' = u''(x) \cdot v(x) + u'(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v'(x) +$$

$$+u(x) \cdot v''(x) = u''(x) \cdot v(x) + 2u'(x) \cdot v'(x) + u(x) \cdot v''(x);$$

$$(u(x) \cdot v(x))''' = \big(u''(x) \cdot v(x) + 2u'(x) \cdot v'(x) + u(x) \cdot v''(x)\big)' =$$

$$= u'''(x) \cdot v(x) + u''(x) \cdot v'(x) + 2\,u''(x) \cdot v'(x) + 2\,u'(x) \cdot v''(x) +$$

$$+u'(x) \cdot v''(x) + u(x) \cdot v'''(x) = u'''(x) \cdot v(x) + 3\,u''(x) \cdot v'(x) +$$

$$+3\,u'(x) \cdot v''(x) + u(x) \cdot v'''(x).$$

$y = u(x) \cdot v(x)$ функциясынан алынган үчүнчү тартипке чейинки туундуларды байкап көрүп, туунду тартиптеринин эки сандардын суммасын даражага көтөрүү менен окшоштугу бар экендигин байкайбыз. Окшоштукту математикалык индукция усулу менен жалпылап, (9.22) – формуласындагы коэффициенттер Ньютондун биномундагы (1 – бөлүк, 1.1.2, 4) коэффициенттерге окшош табыларын көрөбүз. Ньютондун биномундагы ажыралуу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots +$$

$+C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$ көрүнүштө болуп, $C_n^0 = C_n^n = 1,\ a^0 = b^0 = 1$ болгон. Эгерде даражалардын ордуна туундулоо тартиптерин жазып, нөлүнчү тартиптеги туундулар деп $u^{(0)}(x) = u(x),\quad v^{(0)}(x) = v(x)$ функцияларын өздөрүн калтырып, ушул процессти математикалык индукция методун негизинде улантуу менен жалпыласак, көбөйтүндүн каалагандай чектүү $n -$ тартиптеги туундусу

$$[u(x) \cdot v(x)]^{(n)} = (u)^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot (u)^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 \cdot (u)^{(n-2)} \cdot v'' + \cdots$$
$$+C_n^{n-2} \cdot u'' \cdot (v)^{(n-2)} + C_n^{n-1} \cdot u' \cdot (v)^{(n-1)} + u \cdot (v)^{(n)}, \qquad (9.22)$$

эрежеси менен эсептелерин көрөбүз. (9.22) формуласы Лейбництин (9.10) формуласын жалпыланышы болуп, $n = 1$ болгондо (9.22) формуладан Лейбництин (9.10) формуласы келип чыгат. (9.22) формуладагы C_n^m коэффициенттери n элементтүү көптүктүн элементтерин m элементтен топтоштуруулардын саны болуп,

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ формуласы боюнча эсептелишет. Аларды эсептөөдө Паскалдын үч бурчтугун пайдаланууга да болот (1 – бөл. , 1.2, 4 берене). Мисалы (9.22) формуласын пайдаланып, $y = x^9 \cdot e^x$ функциясын 5 – тартиптеги туундусун эсептейли.

$(x^9 \cdot e^x)^{(5)} = (x^9)^{(5)} \cdot e^x + 5\,(x^9)^{(4)} \cdot (e^x)' + 10\,(x^9)^{(3)} \cdot (e^x)'' +$

$+ 10(x^9)'' \cdot (e^x)''' + 5(x^9)' \cdot (e^x)^{(4)} + x^9 \cdot (e^x)^{(5)} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5x^4 e^x +$

$+\ 5 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6x^5 e^x + 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7x^6 e^x + 10 \cdot 9 \cdot 8x^7 e^x + 5 \cdot 9x^8 e^x +$

$+x^9 e^x = 15120x^4 e^x + 15120x^5 e^x + 5040x^6 e^x + 720x^7 e^x +$
$+45x^8 e^x + + x^9 e^x$ болорун көрөбүз.

Мисалдан көрүнгөндөй эки функциянын көбөйтүндүсүнөн $5-$тартиптеги туунду алуу эрежесиндеги 1, 5, 10, 10, 5, 1 коэффициенттери, эки сандын суммасын 5 – даражага көтөрүү амалында келип чыккан коэффициенттерге окшош

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ болушат.

Турактуу санды жогорку тартиптеги туундунун сыртына чыгарып жиберүүгө болоруна, (9.22) формуласындагы экинчи көбөйтүүчү функцияны турактуу сан менен алмаштырып, ишене алабыз .

- Ошондой эле, (9.9) формуласын жалпыланышы болгон эки функциялардын суммаларын (айырмаларын) жогорку тартиптеги туундусу, алардын жогорку тартиптеги туундуларын суммасына (айырмасына) барабар болорун көрсөтүүгө болот:

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = (u(x))^{(n)} \pm (v(x))^{(n)} . \qquad (9.23)$$

- Тескери функциянын жогорку тартиптеги туундуларын эсептөөгө мүмкүнчүлүк берген дагы бир пайдалуу эрежени сунуш кылалы. Айталы $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ өз ара тескери функциялар болушуп, $f'(x) \neq 0$ шарты аткарылсын. Анда $x'_y = \frac{1}{y'_x}$ болуп, кийинки туундусу

$$x''_{yy} = \frac{d}{dy}\left(x'_y\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'_x}\right)\frac{dx}{dy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2}\cdot\frac{1}{y'_x} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3} \qquad (9.24)$$

формуласы менен эсептелет. Мисалы $y = sinx$, $x = \arcsin y$ өз ара тескери функцияларына (9.24) формуласын пайдаланып, экинчи тартиптеги $(\arcsin x)''$ туундусун эсептейли. Чынында эле

$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3} = -\frac{(sinx)''_{xx}}{((sinx)'_x)^3} = -\frac{-sinx}{cos^3x} = \frac{sinx}{cos^3x} = \frac{y}{\sqrt{(1-y^2)^3}}$ келип чыгып, тескери функцияны жазуу эрежеси боюнча y менен x өзгөрүлмөлөрүн орундарын алмаштырып, $(\arcsin x)'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ изделүүчү туундуну табабыз.

§9.5 Жогорку тартиптеги дифференциалдар

9.5.1 Жогорку тартиптеги дифференциалдарды эсептөө эрежелери

$y = f(x)$ функциясы x чекитинде нөлдөн айырмалуу чектүү туундусу жашасын, б. а. дифференцирленүүчү болсун, анда анын x чекитиндеги дифференциалы $dy = f'(x)dx$ көрүнүштө жазылып, ал да дифференцирленүүчү функция болуп калышы мүмкүн. Бул учурда анын дифференциалы $d(dy)$ жашаса, анда аны $y = f(x)$ тин экинчи тартиптеги диффренциалы деп атап, d^2y символу менен белгилейбиз. Демек, $d^2y = d(dy)$ кезеги менен эсептелет. Эгерде d^2y да дифференцирленүүчү функция болуп, анын да дифференциалы жашап калса, анда ал $f(x)$ тин үчүнчү тартиптеги диффренциалы деп аталып, $d^3y = d(d^2y)$ көрүнүшүндө жазылат. Ушундай процесс уланып олтурса, каалагандай n −тартиптеги ($n \in$N) дифференциалына

$d^n y = d(d^{n-1}y)$ кезеги боюнча жетүүгө болот.

- n −тартиптеги дифференциалды туундулар менен туюнтуучу формуланы келтирип чыгаралы: $dy = f'(x)dx$ туюнтмасы x ке карата функция болгондуктан, dx ти турактуу чоңдук катарында дифференциалдын белгисин алдынан чыгарып, экинчи тартиптеги дифференциалды

$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d\big(f'(x)\big) \cdot dx = f''(x) \cdot dx \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2$
көрүнүштө, үчүнчү тартиптеги дифференциалды

$d^3y = d(f''(x) \cdot dx^2\,) = d\big(f''(x)\big) \cdot dx^2 = f'''(x) \cdot dx \cdot dx^2 = \quad f'''(x) \cdot dx^3$,
көрүнүщтө жазабыз. Ушул процессти улантып олтуруп, математикалык индукция усулуна таянып, каалагандай n −тартиптеги дифференциалды

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x) \cdot dx^n, \qquad (9.25)$$

көрүнүштө эсептеп, аны n −тартиптеги туунду менен

$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ жазылышта туюнтууга болот.

- Татаал функциянын жогорку тартиптеги диффренциалдары (9.25) көрүнүштөгү жазылуу формасын сактап калбай, дифференциалдын инварианттуулугу бузулат. Чынында эле $y = f(u)$ жана $u = \varphi(x)$ функцияларынын каалагандай тартиптердеги дифференциалдары жашаса, анда биринчи тартиптеги дифференциал инварианттуулугун сактагандыктан, (9.16) нын негизинде $dy = f'(u)du$ формасында жазууга болот. Татаал функцияда, $du = \varphi'(x)dx$ функция болуп эсептелгендиктен, аны кийинки тартиптеги дифференциалдарды эсептөөдө туруктуу катарында дифференциалдын белгисинен чыгара албастан, эки функциянын көбөйтүндүсүнөн дифференциал алуу эрежесин сактайбыз. Демек, татаал функциянын экинчи тартиптеги дифференциалы

$$d^2y = d(dy) = d[f'(u) \cdot du] = d\big(f'(u)\big) \cdot du + f'(u) \cdot d(du) =$$

$$= f''(u) \cdot du \cdot du + f'(u) \cdot d^2u = f''(u) \cdot du^2 + f'(u) \cdot d^2u \quad (9.26)$$

көрүнүштө эсептелип, жазылуу формасы бузулат. Эгерде u функция болбой жөн эле өзгөрүлмө чоңдук болсо $d^2u = 0$ болуп, (9.26) эрежеси

$d^2y = f''(u) \cdot du^2$ көрүнүшкө келет. Ошентип, татаал функциялардын жогорку тартиптеги дифференциалдары белгилүү бир жазылуу формасына ээ болбойт же инварианттуулук сактабайт. Ошондой болсо да айрым бир учурларда $u = \varphi(x)$ функциясын тандоо менен, татаал функциянын жогорку тартиптеги дифференциалы иварианттулугун сактаган мисалдарды түзүүгө болот. Мисалы $u = ax + b$ көрүнүштөгү сызыкту функция болгон кезде $du = (ax + b\,)'\ dx = a \cdot dx$, $d^2u = (a)'dx \cdot dx = 0 \cdot dx^2 = 0$ келип чыгып, (9.26) да

$d^2y = f''(u) \cdot du^2$, $d^3y = f'''(u) \cdot du^3$, . . . , $d^ny = f^{(n)}(u) \cdot du^n$ жогорку тартиптеги дифференциалдарды эсептөөдөгү белгилүү бир формадагы көрүнүш, же инварианттуулук сакталганына күбө болобуз.

9.5.2 Параметрдик көрүнүштө берилген функцияларды дифференцирлөө

Берилген xOy декарттык координаталар системасында жайгашкан М$(x;\ y)$ координаталуу чекиттер t убактысынан көз каранды болуп, анын $\alpha \le t \le \beta$ аралыгында өзгөргөнүнө жараша, $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(*)$

эрежеси менен кыймылдап жүрсүн. Аталган эреже, берилген функциянын параметрдик теңдемеси болорун (6 – Гл. , 6.1.2) билебиз. Параметрдик теңдемеден t параметрин жоготуп, аны айкын $y = f(x)$ же айкын эмес $F(x, y) = 0$ (9.3.7 – теманы кара) көрүнүштөрдө жазуу мүмкүн. Ошондуктан алар бир эле функция болушуп параметрдик, айкын, айкын эмес жазылыштарына карабай, туундуларын арасында байланыштар бар болуусу керек. Ошол байланыштарды орнотуу шарттарын карап, кандай учурда y'_x туундусун, параметрдик функциялардын **т**уундулары менен байланыштырууга болорун көрсөтөлү. Эгерде $x = \varphi(t)$ функциясына тескери болгон $t = \mathrm{g}(x)$ функциясын табылса, анда бул маанини $(*)$ параметрдик теңдемелердин экинчисине коюп, $y = \psi(\mathrm{g}(x))$ татаал функциясын алабыз. Айталы, түзүлгөн татаал функция 9.1 – теореманын шарттарын канааттандырсын, $x = \varphi(t)$ жана $y = \psi(t)$ функциялары t чекитинде дифференцирленүүчү функциялар ($\varphi'(t) \neq 0$) болушсун, анда татаал функцияны дифференцирлөөнүн (9.15) эрежеси боюнча, тиешелүү x чекитинде $y'_x = y'_t \cdot t'_x$ туундусуна ээ болот. Тескери функциядан туунду алуу эрежесине таянып, $t'_x = \frac{1}{x'_t}$ маанисин койсок, анда

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{же} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,, \quad \varphi'(t) \neq 0 \qquad (9.27)$$

байланыш эрежесине ээ болобуз. Бул (9.27) байланыш эрежесин $dx,\ dy,$ dt белгилөөлөрүн көбөйтүндүлөр катарында карап (9.1.1 теманы кара), алар менен аткарылган амалдардын натыйжасында аныктоого да болот :

$\frac{dy}{dx}$ бөлчөгүн алымы менен бөлүмүн dt га бөлүп жиберсек, (9.27) эреже

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ келип чыгат.

y тен x боюнча экинчи тартиптеги туунду алалы : $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ эске алып,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} =$$

$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}$ ээ болобуз.

Аны $y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$ көрүнүштө кайра жазып, туунду алуу процессин улантуу менен, математикалык индукция усулуна таянып, айкын жана параметрдик көрүнүштөрдө берилген бир эле функциянын жогорку тартиптеги туундуларын арасындагы

$$y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t} \qquad (9.28)$$

байланыш формуласын табабыз.

Мисалы $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq 2\pi,$ параметрдик теңдемеси менен борбору O(0; 0) чекитинде жайгашкан, радиусу R саны болгон айлана берилсин. x, y өзгөрүлмөлөрүн квадратка көтөрүп кошуу менен, айлананын айкын эмес формада жазылган теңдемесин

$F(x,y) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0$ же $x^2 + y^2 = R^2$ көрүнүштө жазабыз. Бул жерде y өзгөрүлмөсү x ке карата функция болгондуктан, y'_x менен y'_t, x'_t тердин арасындагы (9.27) байланыш формуласын пайдаланып,

$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(R\sin t)'_t}{(R\cos t)'_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -ctg\ t$ туундусун табабыз. Ошондой эле 10 – тартиптеги туундусун (9.28) формуласы боюнча эсептеп чыксак,

$$y_x^{(10)} = \frac{\left(y_x^{(9)}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left[(R\sin t)_t^{(9)}\right]'_t}{x'_t} = \frac{R\left[\sin\left(t+\frac{9\pi}{2}\right)\right]'_t}{-R\sin t} = \frac{\cos(t+\frac{9\pi}{2})}{-\sin t} = \frac{\cos(t+4\pi+\frac{\pi}{2})}{-\sin t} =$$
$$\frac{-\sin t}{-\sin t} = 1$$

келип чыгат.

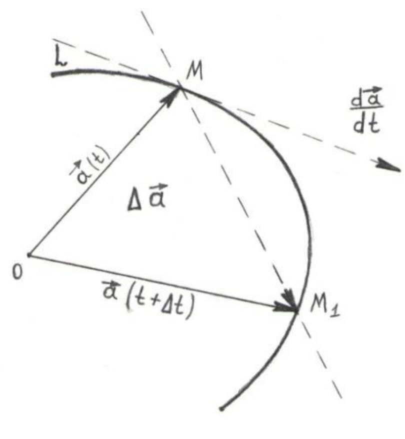
∘ Айкын эмес эмес функциядан туунду алуу, эки өзгөрүлмөлүү функциянын туундусу сыяктуу эсептелип, y өзгөрүлмөсү x ке карата функция болгондуктан (9.3.7 – теманы кара),

$F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0$, көрүнүшүндө табылат. Мындан $y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}$ (9.29)

эрежеси келип чыгат. Айкын эмес функциялардан бир өзгөрүлмө боюнча туунду алып жатканда экинчиси турактуу сыяктуу кабыл алынат. (9.29) формуласын пайдаланып айлананын айкын эмес функция боюнча туунду алсак,

$F'_x = (x^2 + y^2 - R^2)'_x = 2x, \quad F'_y = (x^2 + y^2 - R^2)'_y = 2y$ болгондуктан,

$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{2x}{2y} = -\frac{R\cos t}{R\sin t} = -ctg\ t$ болуп, параметрдик функциялар боюнча (9.27) эрежеси менен туунду алгандагыдай натыйжага ээ болобуз. Айкын эмес функциянын жогорку тартиптеги туундулары да, ушул эле процессти кайра кайталоо менен эсептелет.



9.16-чийме

9.5.3 Вектор функциянын скалярдык аргумент боюнча туундусу

Айталы $]\alpha,\ \beta[$ интервалында аныкталган жана үзгүлтүксүз $\vec{a} = \vec{a}(t)$ скалярдык аргументтүү вектор – функциясы берилип, анын годографы (вектордун учу сызган ийри) L ийриси болсун (6.2.6, (6.12) ни кара). Бул интервалдан фиксирленген t чекитин тандап, ага $t + \Delta t$ өсүндүсүн берсек ($\Delta t \neq 0$), вектор – функция тиешелүү

$\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$ өсүндүсүнө ээ болот. Бул учурда вектор – функциянын L годографындагы (ийрисиндеги) t чекитине туура келген M чекити, ордунан козголуп M_1 чекитинин абалына келет (9.16 – чийме). Жаңыдан

$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}$ векторун түзсөк, ал $\Delta\vec{a}$ векторун $\frac{1}{\Delta t}$ санына көбөйткөндө келип чыккандыктан, $\Delta\vec{a}$ векторуна коллинеардуу жайгашат.

9.4 Аныктама. *Эгерде* $\Delta t\to 0$ *умтулгандагы* $\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}$ *катышын предели жашаса, анда ал пределдин мааниси* $\vec{a}(t)$ *вектор – функциясынан* t *скалярдык аргументи боюнча алынган туунду деп аталып,* $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}$ *,* $\vec{a}'(t)$ *көрүнүштөрдө белгиленишет.*

Ошентип $\frac{d\vec{a}(t)}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)}{\Delta t}$ (9.30)

пределин мааниси анык бир вектор болсо, анда $\vec{a}=\vec{a}(t)$ вектор – функциясы t чекитинде дифференцирленүүчү болот.

$\Delta t\to 0$ умтулганда M_1 чекити L годографы боюнча M чекитине карай жакындап келгендиктен, MM_1 кесүүчү түзү M чекитинен L годограф ийрисине жүргүзүлгөн жаныма түздүн абалына умтулат. Ошондуктан $\frac{d\vec{a}}{dt}$ туундусу, $\vec{a}(t)$ вектор – функциясын годографына M чекитинде жүргүзүлгөн **жаныма - вектор** болуп эсептелет. Ал эми $\frac{d\vec{a}}{dt}$ векторун багыты, t параметри өскөн сайын $\vec{a}(t)$ векторун учку M чекитин годограф боюнча жылуу багытына дал келет.

$\vec{a}=\vec{a}(t)$ векторун $Oxyz$ декарттык координаталар системасын ортторуна карата $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\eta(t)$ координаталары боюнча ажыратып,

$\vec{a}(t)=\varphi(t)\vec{\imath}+\psi(t)\vec{\jmath}+\eta(t)\vec{k}$ көрүнүшкө келтирүүгө болот. Бул учурда вектор – функциянын t чекитиндеги өсүндүсүн

$\Delta\vec{a}=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)=\Delta\varphi(t)\cdot\vec{\imath}+\Delta\psi(t)\cdot\vec{\jmath}+\Delta\eta(t)\cdot\vec{k}$ теңдештиги түрүндө жазса болот. Бул теңдештиктин эки жагын тең нөлдөн айырмалуу Δt га бөлүп жиберсек, $\frac{\Delta\vec{a}(t)}{\Delta t}=\vec{\imath}\cdot\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t}+\vec{\jmath}\cdot\frac{\Delta\psi(t)}{\Delta t}+\vec{k}\cdot\frac{\Delta\eta(t)}{\Delta t}$ келип чыгат. Мындан $\Delta t\to 0$ умтулгандагы пределге өтүү менен

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt}=\vec{\imath}\cdot\frac{dx}{dt}+\vec{\jmath}\cdot\frac{dy}{dt}+\vec{k}\cdot\frac{dz}{dt}=\vec{\imath}\cdot\frac{d\varphi}{dt}+\vec{\jmath}\cdot\frac{d\psi}{dt}+\vec{k}\cdot\frac{d\eta}{dt}, \qquad (9.31)$$

вектор – функциянын t чекитиндеги туундусу, анын ар бир координаталары боюнча туундусун алууга теңдеш болорун байкайбыз. Эгерде вектор – функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ мейкиндикте кыймылдап бара жаткан чекиттин радиус – вектору болсо, анда $\frac{d\vec{r}}{dt}$ −туундусу кыймылдагы чекиттин убакыттын t ирмеминдеги ылдамдыгы $v(t)$ болот.

- **Дифференцирлөө эрежелери.**

1.Эгерде $\vec{c}$ вектору турактуу вектор болсо, анда $\frac{d\vec{c}}{dt} = 0$.

2. Эгерде $\vec{a}(t)$ жана $\vec{b}(t)$ функциялары t боюнча диффернцирленүүчү болсо, анда

$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)\right) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$ аткарылат.

3. Турактууну туундунун белгисинин сыртына чыгарууга болот:

$\frac{d(\mu\cdot\vec{a}(t))}{dt} = \mu \cdot \frac{d\vec{a}(t)}{dt}$, μ −турактуу көбөйтүүчү.

4. Эки вектор – функциялардын скалярдык көбөйтүндүсүнүн туундусу

$$\frac{d}{dt}\,(\vec{a}(t),\ \vec{b}(t)) = \left(\frac{d\vec{a}(t)}{dt},\ \vec{b}(t)\ \right) + \left(\vec{a}(t),\ \ \frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right), \qquad (9.32)$$

эрежеси менен алынат.

Натыйжа. Бирдик $\vec{e}(t)$ *векторун узундугу* $|\vec{e}(t)| = 1$ болуп, *(турактуу вектор сыяктуу) алардын скалярдык көбөйтүндүсүн туундусу*

$\frac{d}{dt}(\vec{e}(\mathrm{t}),\ \vec{e}(\mathrm{t})) = \left(\frac{d\vec{e}(t)}{dt},\ \vec{e}(t)\ \right) + \left(\vec{e}(t),\ \ \frac{d\vec{e}(t)}{dt}\right) = 0 + 0 = 0$ *болгондуктан,*

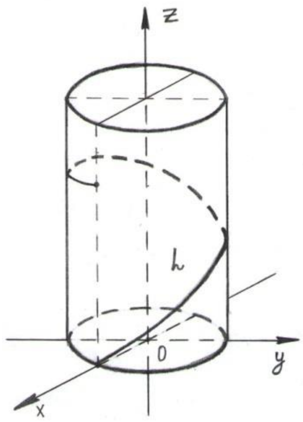
$\frac{d\vec{e}}{dt}$ *вектору менен* $\vec{e}(t)$ *вектору өз ара перпендикуляр болушат*

$\frac{d\vec{e}}{dt} \perp \vec{e}(t)$.

5. Эки вектор – функциялардын вектордук көбөйтүндүсүн туундулары

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t),\ \vec{b}(t)\right] = \left[\frac{d\vec{a}(t)}{dt},\ \vec{b}(t)\right] + \left[\vec{a}(t),\ \frac{d\vec{b}(t)}{dt}\right] \qquad (9.33)$$

эрежеси менен эсептелет.



9.17-чийме

Мисалы $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \\ z = h\,t, \end{cases}$ $0 \leq t < 2\pi$ $(a, b, h -$ $const.)$ параметрдик теңдемеси менен эллипстик цилиндрдин бети менен толук айланып чыккан L ийриси (9.17 – чийме) берилет. Ошол эле L ийрисин

$\vec{r} = \vec{a}(t) = a\cos t \cdot \vec{\imath} + b\sin t \cdot \vec{\jmath} + h\,t \cdot \vec{k}$

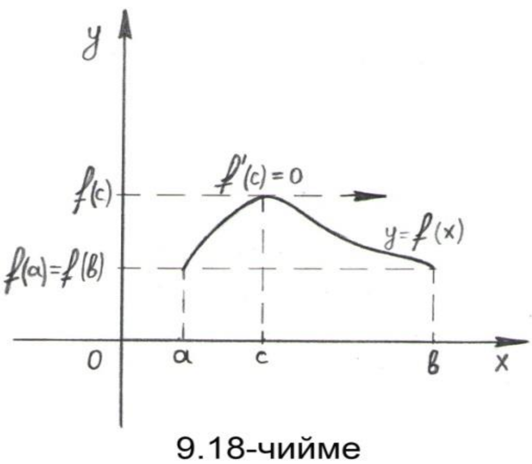
векторунун годографы деп эсептеп, (9.31) формуласы боюнча

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (a\cos t)' \cdot \vec{\imath} + (b\sin t)' \cdot \vec{\jmath} + (h\,t)' \cdot \vec{k} =$$

$= -a \cdot \sin t \cdot \vec{\imath} + b \cdot \cos t \cdot \vec{\jmath} + h \cdot \vec{k}$ туундусуна ээ болобуз.

§9.6 Функциянын туундуларынын аралыктагы мааанилери

9.6.1 Ферманын жана Роллдун теоремалары



9.18-чийме

Функциялардын үзгүлтүксүздүгүн пайдаланып, анын аралыктагы маанилерин өзгөрүүлөрүнө, алдын ала болжол – пикирлер айтылган эле. Ошондой эле аралыкта дифференцирленүүчү функциялардын айрым мүнөз – касиеттерин да, алдын ала далилдерге таянып, болжолдоп билүүгө болот.

9.3. Ферманын теоремасы. *Айталы $f(x)$ функциясы $[a,\ b]$ сегментинде аныкталган жана үзгүлтүксүз болуп, $]a,\ b[$ интервалында дифференцирленүүчү (чектүү туундулары жашаган же* *туундулары да үзгүлтүксүз) функция болсун. Эгерде бул интервалдын ичинде жайгашкан кандайдыр бир* с *чекитинде,* $f(x)$ *функциясы өзүнүн эң чоң (эң кичине) маанилерин кабыл алса, анда бул* с *чекитинде*

$$f'(\text{c}) = 0 \qquad (9.34)$$

шарты аткарылат жана ал экстремумдардын жашашын зарыл шарты деп аталат .

Далилдөө. ►Теореманын шарты боюнча $f(x) \in \text{C}[a,\ b]$ болгондуктан, Вейерштрасстын (§8.2, 8.5 – теореманы кара) теоремасы боюнча, сөзсүз бул аралыкта өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерине жетет. Айталы с чекитинде $f(x)$ эң чоң маанисине жеткени менен, (9.34) зарыл шарты тескерисинче аткарылбай калды дейли. Анда $f'(\text{c}) > 0$ же $f'(\text{c}) < 0$ болушу мүмкүн.

$f'(\text{c}) > 0$ деп ойлоп, с чекитиндеги функциянын туундусун аныктамасынан $f'(\text{c}) = \lim\limits_{x \to \text{c}} \frac{f(x) - f(\text{c})}{x - \text{c}} > 0$, барабарсыздыгын алабыз. Предел алдындагы туюнтма с чекитин жакынкы чеке белинде белгисин сактагандыктан, с чекитине эки жактан тең чексиз жакын чекиттерде, $\frac{f(x) - f(\text{c})}{x - \text{c}} > 0$ шарты аткарылат. Бөлчөк оң болушу үчүн :

1). Алымы $f(x) - f(\text{c}) > 0$ жана бөлүмү $x - \text{c} > 0$ оң , же $x > \text{c} \Rightarrow f(x) > f(\text{c})$ болушу керек. Демек x тер **с** чекитине оң жактан чексиз жакындап келгенде монотондуу өсүүчү болорун көрөбүз.

2). Алымы $f(x) - f(\text{c}) < 0$ жана бөлүмү $x - \text{c} < 0$, же

$x < \text{c} \Rightarrow f(x) < f(\text{c})$ болуп, x тер с чекитине сол жактан чексиз жакын келгенде деле монотодуу өсүүчү экендигине күбө болобуз.

Мындан с чекитинде $f(x)$ монотондуу өсүүчү функция болору келип чыгып, **с** чекитинде өсүүсүн улантып, эң чоң маанини кабыл ала албасы белгилүү болот. Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүп, $f'(\text{c}) < 0$ деп ойлогон учурда да, $f(x)$ функциясы **с** чекитинде монотондуу кемүүчү болуп, бул чекитте эң чоң маанини кабыл албасын көрөбүз. Бул биздин $f(x)$функциясы **с** чекитинде эң чоң маанини кабыл алат деген шартыбызга каршы келет. Мындай карама - каршылык, $f'(\text{c}) > 0$ же $f'(\text{c}) < 0$ болсун деген тескери оюбуздун туура эмес экендигин далилдеп, $f'(\mathrm{c}) = 0$ гана болорун ырастайт (9.18 – чийме). **с** чекитинде $f(x)$ эң кичине маанисине жеткен учурда деле, (9.34) зарыл шартын аткарылышын жогорудагыдай ыкма менен көрсөтүүгө болот.◄

9.4 Роллдун теоремасы. *Эгерде* $f(x)$ *функциясы*

1). $a \leq x \leq b$ *туюк аралыгында (сегментинде) үзгүлтүксүз;*

2). $a < x < b$ *ачык аралыгында (интервалында)*

дифференцирленүүчү;

3). *Аралыктын учтарында барабар* $f(a) = f(b)$ *маанилерди кабыл алса.*

Анда бул интервалдын ичиндеги жок дегенде бир η *чекитинде, функциянын туундусу нөлгө* $f'(\eta) = 0$ *тең болот* $(a < \eta < b)$.

Далилдөө. ►Теореманын шарты боюнча $f(x) \in \mathrm{C}[a,\ b]$, Демек Вейерштрасстын теоремасы боюнча, бул аралыкта өзүнүн эң чоң М жана эң кичине m маанилерине сөзсүз жетет. Төмөндөгүдөй учурлардын болушу мүмкүн:

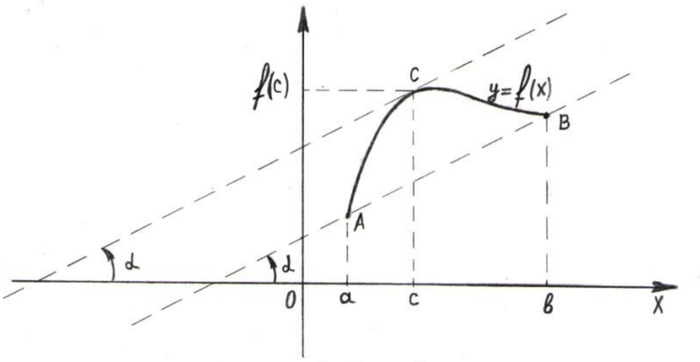
1. М $=$ m болуп калса, $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$ болгондуктан, $[a,\ b]$ аралыгында $f(x) = \mathrm{M} = m$ турактуу функция болуп, турактуунун туундусу катарында интервалдын бардык x чекиттеринде туундусу $f'(x) = 0$ болору келип чыгат. Анда η чекити деп, x чекиттеринин каалаган бирин ала берүүгө болуп, теорема далилденет.

2. $\mathrm{M} > m$ болсун. Аталган сегменттин чекиттеринде $f(x)$ үзгүлтүксүз функция катарында бул M, m маанилердин экөөсүнө тең сөзсүз жетет. Бирок аралыктын учтарында $f(a) = f(b)$ барабар маанилерди кабыл алгандыктан, алар эң чоң жана эң кичине маанилер боло алышпайт. Ошондуктан Ферманын теоремасы боюнча $]a,\ b[$ интервалынын ички чекиттериндеги **с** чекитинде эң чоң же эң кичине маанилерге жетип, $f'(\mathrm{c}) = 0$ шарты аткарылат. Анда $\eta = \mathrm{c}$ деп алсак, теорема бул учур үчүн да далилденген болот (9.18 - *чийме*). ◄

$n -$ тартипке чейинки бардык туундулары жашаган $F(x)$ функциясы үчүн, Роллдун теоремасын төмөндөгүдөй жалпылоого болот.

9.5 Теорема. *Эгерде* $F(x)$ *функциясын* $]a,\ b[$ *интервалын бардык чекиттеринде* $n-$ *тартипке чейинки бардык туундулары жашаса жана алар интервалдын ичинде өсүү тартибинде жайгашышкан ар башка* $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ *чекиттеринде барабар маанилерди кабыл алышса, анда бул интервалдын ичинен кандайдыр бир* η *чекити табылып,* $F^{(n)}(\eta)=0$ *шарты аткарылат.*

Теореманы далилдөө үчүн $]a,\ b[$ интервалын ар башка $(x_{k-1},\ x_k)$ сыяктуу n интервалчаларга бөлсөк, Роллдун теоремасы боюнча $F(x)$ функциясы үчүн анын ар биринин, жок дегенде бир x чекитинде $F'(x)=0$ болот.



9.19-чийме

Интервалчалардын учтарында $F'(x)$ функциясы да барабар маанилерди кабыл алгандыктан, ага да Роллдун теоремасын колдонуп, интервалчалардын калган $n-1$ нин ар биринде жок дегенде бир жолу $F''(x)=0$ болоруна ишенебиз. Мындай процессти улантып олтуруп, интервалчалардын акыркы калган бирөөсүнүн жок дегенде бир η чекитинде $F^{(n)}(\eta)=0$ болорун алабыз.

9.6.2 Функциянын орточо мааниси жөнүндөгү теорема

Функциянын $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ туундусу менен анын өсүндүлөрүн $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ катыштарын арасындагы байланыш, практикалык эсептөөлөрдө жакындаштырып эсептөө ыкмаларын бири катары колдонулуп келет. Бул байланышты төмөндөгү орточо маани жөнүндөгү Лагранждын теоремасын жардамы менен көрсөтөбүз.

9.6 Лагранждын теоремасы. *Эгерде* $y=f(x)$ *функциясы* $[a,\ b]$ *сегментинде үзгүлтүксүз, ал эми* $]a,\ b[$ *интервалында дифференцирленүүчү болсо, анда бул интервалдын ичинен жок дегенде бир с чекити табылып,*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (9.35)$$

барабардыгы орун алат .

Далилдөө. ►Айталы функциянын графиги A$(a; f(a))$ чекитинен башталып, $B(b; f(b))$ чекитинде бүтсүн. $[a,\ b]$ аралыгында Роллдун теоремасын шарттарын канааттандырган

$F(x) = \mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(a) - \frac{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}{b-a} \cdot (x - a)$ жардамчы функциясын түзөлү. Чынында эле бул жардамчы функция, $[a,\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болушкан $\mathrm{f}(x)$ функциясы менен сызыктуу $(x - a)$ функцияларын айырмасы катарында үзгүлтүксүз болот. Мында $\mathrm{f}(a)$, $\frac{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}{b-a}$ турактуу сандар. Жардамчы функция аралыктын учтарында барабар маанилерди $F(a) = F(b) = 0$ кабыл алгандыктан, Роллдун теоремасы боюнча $]a,\ b[$ интервалынан жок дегенде бир с чекити табылып, $F'(\mathrm{c}) = 0$ шарты аткарылат. Анда $F(x)$ функциясын туундусу

$F'(x) = f'(x) - \frac{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}{b-a}$ көрүнүштө табылгандыктан,

$\mathrm{f}'(\mathrm{c}) - \frac{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}{b-a} = 0$ же $\frac{\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)}{b-a} = f'(\mathrm{c})$ ээ болуп, (9.35) орточо маанисин туура экендигин көрөбүз. ◄

Геометриялык жактан Лагранжын теоремасы $]a,\ b[$ интервалын ичинен жок дегенде бир с чекити табылып, C$(\mathrm{c}; \mathrm{f}(\mathrm{c}))$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма түз, функциянын графигин кесүүчү (AB) түзүнө паралледь болорун көрсөтөт (9.19 – чийме). Лагранждын (9.35) формуласын

$$\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a) = f'(\mathrm{c}) \cdot (b - a) \qquad (9.36)$$

көрүнүштө жазып, аны чектүү өсүндүлөрдүн формуласы деп аташат. Анткени жетишерлик кичине $]x_0,\ x_0 + \Delta x[$ интервалын ичинде жайгашкан бардык чекиттердин бирөөсү с чекити болуп калышы мүмкүн деп, жалпы учурда ал чекитти с $= x_0 + \theta\Delta x$ көрүнүштө белгилеп ($0 < \theta < 1$), (9.36) формуланы

$\mathrm{f}(x_0 + \Delta x) - \mathrm{f}(x_0) = f'(\,x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x$ же

$$\Delta y = f'(\,x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x \qquad (9.37)$$

көрүнүштө жазабыз. Бул формула функциянын өсүндүсү менен туундусун байланыштырып, $\Delta y = f'(\,x_0) \cdot \Delta x + \mathrm{o}(\Delta x)$ же (9.5) барабардыгынан келип чыгуучу $\Delta y \approx f'(\,x_0) \cdot \Delta x$ жакындаштырылган теңдештикти толуктайт. Δx өсүндүсү чексиз кичинергенде каталык азайып, Δy тин эки (9.5), (9.37) учурдагы маанилери бири - бирине жакындашат. Ошондуктан (9.36), (9.37) чектүү өсүндүлөрдүн формулалары деп аталышкан.

Жетишерлик кичине $]x_0,\ x_0 + \Delta x[$ аралыгы үчүн жазылган Лагранждын (9.37) формуласы, бул аралыктын ички чекиттеринде

$y = f(x)$ функциясын сызыктуу функция (графиги түз сызык) менен алмаштырууга мүмкүнчүлүк берип, $y = f(x)$ тин графиги түз сызыктын кыркындыларынан кураштырылгандай элес калтырат:

$\forall\, \eta \in\ ]x_0,\ x_0 + \Delta x[\ \ :\ \ \mathfrak{f}(x_0 + \Delta x) = \mathfrak{f}(x_0 + \eta - x_0) = \mathfrak{f}(\eta) = \mathfrak{f}_1(\eta)$ деп белгилесек, анда $\mathfrak{f}_1(\eta) = \mathrm{A} + \mathrm{B}(\eta - x_0)$ көрүнүшүндөгү сызыктуу функцияга ээ болобуз. Мында $\mathrm{A} = \mathfrak{f}(x_0)$, $\mathrm{B} = f'(\,x_0)$ турактуу сандар, $\Delta x = \eta - x_0$. Сөз кылынган чексиз кичине аралыкта $f(x)$ ийрисин, $\mathfrak{f}_1(\eta)$ түзү менен алмаштырууга болот $f(x) \sim \mathfrak{f}_1(\eta)$. Мындай алмаштыруулар жакындаштырып эсептөөлөрдө кеңири колдонулуп, айырмалардын схемалары деген ат алышкан.

9.6.3 Функциянын монотондуулугу жөнүндөгү теорема

Функциянын орточо мааниси жөнүндөгү теореманын дагы бир колдонулушу катарында төмөндөгү теореманы далилдейли.

9.7 Теорема. *Айталы $f(x) \in \mathrm{C}\ [a,\ b]$ жана $]a,\ b[$ интервалында дифференцирленүүчү болсун. Эгерде $f(x)$ функциясы $]a,\ b[$ аралыгындагы бардык x чекиттеринде оң $f'(x) > 0$ туундуга ээ болсо, анда бул аралыкта шыдыр монотондуу өсүүчү, ал эми терс $f'(x) < 0$ туундуга ээ болсо шыдыр монотондуу кемүүчү болот.*

Далилдөө. ►Далилдөөнү $f'(x) > 0$ болгон учур үчүн жүргүзөлү. $]a,\ b[$ интервалын каалаган жеринен $x_1 < x_2$ болгондой $x_1,\ x_2$ чекиттерин алсак, орточо маани жөнүндөгү теореманын шарттары аткарылгандыктан, алардын арасынан с чекити табылып

$(x_1 < \text{c} < x_2)$, $f(x_2) - f(x_1) = f'(\text{c}) \cdot (x_2 - x_1)$ теңдештиги орун алат. Бул теңдештиктин оң жагындагы эки көбөйтүүчүлөр $f'(\text{c}) > 0$, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$ оң болушкандыктан, анын сол жагынын оң болушу $f(x_2) - f(x_1) > 0$ же $f(x_2) > f(x_1)$ келип чыгат Анда берилген аралыктын бардык чекиттеринде $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ шарты аткарылып, $f(x)$ шыдыр монотондуу өсүүчү функция болору далилденет. Ушундай эле талкуулоону жүргүзүү менен, $f'(x) < 0$ болгон учурда $f(x)$ тин шыдыр монотондуу кемүүчү болорун далилдөөгө болот.◄

Орточо маани жөнүндөгү теореманы жалпылоочу Кошинин теоремасын далилдөөсүз кабыл алабыз.

9.8 Кошинин теоремасы. *Айталы 1) $f(x)$ жана g(x) функциялары $[a, b]$ сегментинде аныкталган жана үзгүлтүксүз болушсун;*

2) $f(x)$, $\text{g}(x)$ функцияларын экөөсү тең, жок дегенде $]a, b[$ интервалында дифференцирленүүчү же чектүү туундуларга ээ болушсун;

3) $\text{g}'(x) \neq 0$, $x \in]a, b[$ шарты аткарылсын.

Анда a жана b сандарын арасынан кандайдыр бир с чекити

$(a < \text{c} < b)$ табылып, Кошинин формуласы деп аталуучу

$$\frac{f(b)-f(a)}{\text{g}(b)-g(a)} = \frac{f'(\text{c})}{\text{g}'(\text{c})} \qquad (9.38)$$

теңдештиги орун алат.

6. Мисалдар

1) $f(x) = 3x - x^3$ функциясын монотондуулук аралыктарын аныктагыла.

Чыгаруу:► Берилген функциянын туундусу

$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$ болуп, $1 - x^2 < 0$ болсо же $x \in]-1, 1[$ $\Rightarrow$ $f'(x) < 0$ – терс, ал эми $1 - x^2 > 0$ болсо же

$x \in \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[\ \Rightarrow f'(x) > 0 -$ оң маанилерди кабыл алат. Анда 9.7- теореманын негизинде : $]-1,\ 1[\, -$ монотодуу кемүү аралыгы, $]-\infty, -1[$ жана $]1, +\infty[\, -$ монотондуу өсүү аралыктары болушат.◄

2) $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{2}{x} & \text{эгерде } x \neq 0, \\ 0 & \text{эгерде } x = 0 \end{cases}$ функциясы $x_0 = 0$ чекитинде өсүүчү болгону менен, анын каалагандай жакынкы

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) -$ чеке белинде $(\varepsilon > 0)$ өсүүчү болбосун далилдегиле.

Далилдөө: ►$x_0 = 0$ чекитиндеги $f(x)$ функциясын оң жана сол жактуу туундулары жашап, экөөсү тең барабар 1 маанисине ээ болушат. Чынында эле сол жактуу туундусу

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{x + x^2 \sin\frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \to 0-} \left(1 + x \sin\frac{2}{x}\right) =$$

$= 1 + 0 \cdot \text{А} = 1$, ошондой эле оң жактуу туундусу да $f'(x_0 + 0) = 1$ болорун оңой эле көрсөтө алабыз. Мында А саны $-1 \leq \text{А} \leq 1$ аралыгындагы чектүү сан, анткени $x \to 0$ кайсы жактан нөлгө умтулса да, $\sin\frac{2}{x}$ функциясын пределдери ушул аралыкты жыш толтуруп, алардын кайсы бири болгон А санына тең боло алат. Ошондуктан $x_0 = 0$ чекитиндеги функциянын туундусу

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 2x \sin\frac{2}{x} - 2\cos\frac{2}{x} & \text{эгерде } x \neq 0, \\ 1 & \text{эгерде } x = 0 \end{cases}$$ көрүнүштө табылат.

Демек $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(0) = 1 > 0$ оң сан болгондуктан, 9.7 – теореманын негизинде $x_0 = 0$ чекитинде $f(x)$ өсүүчү функция болот. Эгерде бул өсүү процесси $x_0 = 0$ чекитин жакынкы $\varepsilon -$ чеке белинде улана берет деп тескерисинче ойлосок, анда бул чекиттин каалагандай жакынкы $(-\varepsilon,\ \varepsilon) -$ чеке белиндеги x чекиттеринде $f'(x) \geq 0$ оң же жок дегенде турактуу абалын сактап калууга тийиш. Аны текшерип көрүү үчүн, чеке белдин ченемин көрсөтүүчү ε оң санынын чоңдугуна карап, $n -$ номер сандарын тандоо менен

$x_n = \frac{1}{\pi n} < \varepsilon$ шартын канааттандырган, $x_0 = 0$ чекитин $(-\varepsilon,\ \varepsilon) -$ чеке белинде жайгашкан $x = x_n = \frac{1}{\pi n}$ чекиттерин удаалаштыгын түзөлү. $x \neq$

0 болгон учурда чеке белден тандалган чекиттердеги $f'(x)$ туундусун белгисин тактайлы :

$$f'(x_n) = f'\left(\frac{1}{\pi n}\right) = 1 + 2\frac{1}{\pi n} \cdot \sin 2\pi n - 2\cos 2\pi n = 1 + 2 \cdot \frac{1}{\pi n} \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -1$$

болуп, $f'(x_n) = -1 < 0$ терс сан экендиги, же чеке белдин тандалган чекиттеринде кемүүчү функция болору келип чыгат. Андай болсо $\varepsilon -$ чеке белин чекиттеринде функция өсүүсүн уланта берет деген тескери оюбуз туура эмес болуп, мисалда коюлган шарт далилденген болот.◄

3) Айталы $f(x)$ функциясы : а) $[a,\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз $f'(x)$ туундуга ээ болсун; б) $]a,\ b[$ интервалында экинчи тартиптеги $f''(x)$ туундусу жашасын; в) $f(a) = f'(a) = 0,\ f(b) = 0$ шарты аткарылсын.

Анда $]a,\ b[$ интервалын ичинен с чекити табылып, $f''(\text{c}) = 0$ болорун далилдегиле.

Далилдөө: ►Мисалдагы $f(x)$ функциясы Роллдун теоремасын шарттарын канааттандыргандыктан, бул интервалдын ичинен жок дегенде бир η чекити табылып, $f'(\eta) = 0$ шарты аткарылат $(a < \eta < b)$. Жаңыдан түзүлгөн $[a,\ \eta]$ сегментинде $f'(x)$ функциясын карасак : а) – шарты боюнча $f'(x)$ функциясы $[a,\ \eta]$ сегментинде үзгүлтүксүз, ал эми б) – шарты боюнча туундусу $(f'(x))' = f''(x)$ жашайт, в) – шарты боюнча аралыктын учтарында барабар $f'(a) = f'(\eta) = 0$ маанилерди кабыл алат. Анда $f'(x)$ функциясы $[a,\ \eta]$ сегментинде Роллдун теоремасын шарттарын канааттандыргандыктан, $]a,\ \eta[$ интервалын ичинен бир с чекити $(a < \text{c} < \eta)$ табылып, $(f'(\text{c}))' = f''(\text{c}) = 0$ барабардыгы аткарылат.◄

4) Каалагандай x, y өзгөрүлмөлөрү үчүн $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ барабарсыздыгынын туура болорун далилдегиле.

Далилдөө: ►$[x,\ y]$ сегментинде косинус функциясы Лагранждын теоремасын шарттарын канааттандыргандыктан, $]x,\ y[$

интервалынын ичинен ξ чекитити табылып, (9.35) тин негизинде

$\frac{\cos x - \cos y}{x - y} = \sin\xi \equiv f'(\xi)$ тендештиги орун алат. Мындан $|\sin\xi| \leq 1$ экендигин эске алып, $\left|\frac{\cos x - \cos y}{x - y}\right| \leq 1$ же далилдөөнү талап кылган барабарсыздыктын $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ туура экендигине ишенебиз.◄

5) Айталы $f(x)$ жана $\mathrm{g}(x)$ функциялары $x \geq x_0$ болгондо дифференцирленүүчү болушуп, ага кошумча $f(x_0)$ = $\mathrm{g}(x_0)$ жана $x > x_0$ болгондо $f'(x) > \mathrm{g}'(x)$ шарттарын канааттандырышсын. Анда $x > x_0$ болгондо $f(x) > \mathrm{g}(x)$ барабарсыздыгы орун аларын далилдегиле.

Далилдөө: ►Жардамчы $\varphi(x) = f(x) - \mathrm{g}(x)$ функциясын түзүп, аны эркин тандалган $[x_0,\ x]$ сегментинде карайлы $(x > x_0)$. Жардамчы функция, каралган сегментте Лагранждын теоремасын шарттарын канааттандырат. Ошондуктан бул аралыктын ичинен жок дегенде бир ξ чекити табылып $(\xi > x_0)$,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(\xi) \quad \text{же } \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(x - x_0) \qquad (9.39)$$

барабардыгы орун алууга тийиш. Мындан мисалдын шартынан чыгуучу

$\varphi(x_0) = f(x_0) - \mathrm{g}(x_0) = 0, \quad \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \mathrm{g}'(\xi) > 0, \quad x - x_0 > 0$ барабарсыздыктарын эске алып, (9.39) теңдештигинен жардамчы функциянын $\varphi(x) > 0$ оң болоруна, же $x > x_0$ болгондо далилдөөнү талап кылган барабарсыздыктын туура экендигине

$f(x) - \mathrm{g}(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > \mathrm{g}(x)$ күбө болобуз.◄

§9.7. $\mathrm{C}^{n}[a,\ b]$ мейкиндигинде Тейлордун формуласын түзүү

9.7.1 $\mathrm{C}^{n}[a,\ b]$ мейкиндиги жөнүндө түшүнүк

Чөйрө – таануу процессинде функциялар менен кайсы бир кубулуштар моделдештирилип, алардын туундулары ошол кубулуштардын өзгөрүү ылдамдыгы, багыты, ылдамдануусу сыяктуу айрым касиеттерин билүүгө мүмкүнчүлүк берерин жогорудагы темалардан көрдүк. Бирок функцияларды жана алардын туундуларын кадимки сандарга окшотуп саноо, ченөө же кубулуштардын чоңдуктарын баалоо иштерине колдоно алабызбы?-деген суроо туулат. Ошондуктан, функциялардын аралыктарын ченөө (метрика) үчүн киргизилген эрежеге таянып, $n -$ тартипке чейинки туундулары менен кошо $[a,\ b]$ сегментинде аныкталышып жана үзгүлтүксүз болушкан функциялардын көптүгүн таануу процессиндеги колдонуу мүмкүнчүлүктөрүн кеңейтүүгө болорун көрсөтөбүз.

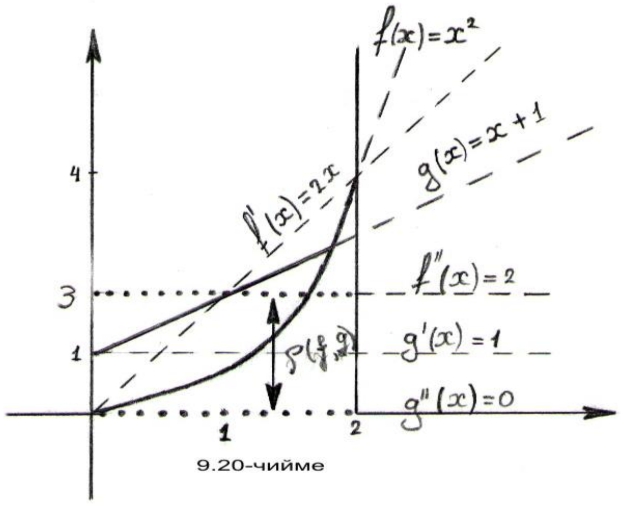
9.5 Аныктама. *$[a,\ b]$ сегментинде $n-$тартипке чейинки туундулары менен кошо аныкталган жана үзгүлтүксүз болгон бардык функциялардын көптүгүн $\mathrm{C}^n[a,\ b]$ көрүнүштө белгилеп, анын каалагандай эки $f(x),\ \mathrm{g}(x)$ элементтеринин арасындагы аралыкты*

$$\rho(f,\mathrm{g}) = \max_{x\in[a,\ b]}\left\{|f(x)-\ \mathrm{g}(x)|, \left|f'^{(x)}-\ \mathrm{g}'(x)\right|, \dots \left|f^{(n)}(x)-\mathrm{g}^{(n)}(x)\right|\right\} \quad (9.40)$$

эрежеси менен эсептеп, $\mathrm{C}^n[a,\ b]$ көптүгүн (9.40) ченөө эрежесине карата метрикалык мейкиндик деп айтабыз.

Киргизилген (9.40) ченөө эрежеси метриканын үч аксиомасын тең

1. $\rho(f,\mathrm{g}) = 0\ \Leftrightarrow\ f = \mathrm{g}$ эки функция дал келишерин;
2. $\rho(f,\mathrm{g}) = \rho(\mathrm{g}\,, f)$ симметрия аксиомасын;
3. $f, \mathrm{g}\,, \varphi \in \mathrm{C}^n[a,\ b]$: $\rho(f,\mathrm{g}) + \rho(\mathrm{g}\,, \varphi) \le \rho(f, \varphi)$ үч бурчтук аксиомасын канааттандырарын текшерип көрүүгө болот. Мындан сырткары $\mathrm{C}^n[a,\ b]$ бардык пределдик чектиттерин кармап турган толук метрикалык мейкиндик болуп эсептелет.



9.20-чийме

$\mathrm{C}^n[a,\ b]$ метрикалык мейкиндике таандык болгон функциялар менен сүрөттөлгөн кубулуштардын аралыктарын жеринде ченөө мүмкүн эмес болсо, анда алардын аралыктарын кайсы бир тактыкта (9.40) эрежеси аркылуу математикалык тилде аныктоого болот. Ошентип функциянын жогорку тартиптеги туундуларынын үзгүлтүксүз функция болуусу, ал сүрөттөгөн кубулушту математикалык тилде изилдөөгө ыңгайлуу шарт түзөт.

Мисалы $f(x) = x^2 + 1$, $\mathrm{g}(x) = x + 1$ функциялары $\mathrm{C}^2[0,\ 2]$ мейкиндигине элемент боло алышат. Анткени экөө тең экинчи тартипке чейинки туундулары менен кошо $[0,\ 2]$ сегментинде үзгүлтүксүз болушат. Алардын арасындагы метрика же аралык (9.40) эрежесине ылайык,

$$\rho(f, \mathrm{g}) = \max_{x \in [0,\ 2]}\{|(x^2 + 1) - (x + 1)|, |2x - 1|, |2 - 0|\} = 3$$

саны болот (9.20 – чийме).

9.7.2 Тейлордун формуласы

Коэффициенттери чыныгы сандар болгон, $n -$ тартиптеги

$$\mathrm{P}_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

көп мүчөнү карайлы. Берилген көп мүчө $\forall x \in [a,\ b] \subset R$ аныкталып, $\mathrm{C}^n[a,\ b]$ мейкиндигине таандык болот, анткени $[a,\ b]$ аралыгында $n -$ тартипке чейинки бардык туундулары жашап, үзүлтүксүз функциялар болушат. Биз $\mathrm{C}^n[a,\ b]$ мейкиндигине таандык болгон $f(x)$ функциясын, жок дегенде бир x_0 чекитине жакынкы аймакчанын ички чекиттеринде $\mathrm{P}_n(x)$ көп мүчөсү көрүнүштө жазууга болобу? – деген суроого жооп издейли. Айталы, $f(x)$ функциясы $\mathrm{P}_n(x)$ көп мүчөсү сыяктуу ажырап

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n \quad (9.41)$$

жазылсын. Анын a_i коэффициенттерин табайлы $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

(9.41) де $x = x_0$ десек, $a_0 = f(x_0)$ бош мүчөсү табылат.

$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + na_n(x - x_0)^{n-1}$ туундусуна $x = x_0$ маанисин койсок, $a_1 = f'(x_0)$ коэффициентин табабыз.

$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3(x - x_0) + \dots + (n - 1) \cdot n \cdot a_n(x - x_0)^{n-2}$ – экинчи тартиптеги туундусуна $x = x_0$ маанисин койсок, анда

$a_2 = \frac{1}{2} \cdot f''(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2!}$ коэффициентин аныктаган болобуз.

$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \cdots + (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot a_n (x - x_0)^{n-2}$ – үчүнчү тартиптеги туундусуна $x = x_0$ мааниси коюлган соң ,

$a_3 = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{3!}$ коэффициенти аныкталат. Ушул процессти улантуу менен математикалык индукция усулуна таянып, (9.41) көп мүчөсүнүн акыркы $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ коэффициентин табабыз. Табылган коэффициенттерди (9.41) ге коюп, $f(x)$ функциясынын

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 +$$

$+ \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ көп мүчө көрүнүштөгү ажыралышына ээ болобуз. Бирок коэффициенттер $x = x_0$ чекитинде эсептелгендиктен, кайсы бир тактыктагы каталыктарга жол берүү менен $f(x)$ функциясын x_0 чекитинин жакынкы чеке белиндеги x чекиттеринде гана, жогорудагыдай көп мүчөгө ажырап жазылышы мүмкүн деп, бул ажыралышты $n-$ тартиптеги Лагранж тибиндеги

$R_n(x) = f(x) - \mathrm{P}_{n-1}(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta \Delta x)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ калдык мүчө улоо

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} \cdot (x - x_0)^n + \qquad (9.42)$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta \Delta x)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

менен көрүнүштө жазуу туура болот. Мында θ параметри $0 < \theta < 1$ болгон сан болуп, анын бул аралыктагы өзгөрүүсүн жүрүшүндө x аргументи, x_0 чектин жакынкы $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ чеке белиндеги бардык маанилерди кабыл алууга жөндөмдүү. Аны $x = x_0 + \theta \Delta x$ көрүнүштө жазып түшүндүрөбүз. Демек калдык мүчө чексиз кичине чоңдук болгондо гана, (9.42) ажыралуусу x_0 чектинин жакынкы чеке белинде туура болот. Ошондуктан калдык мүчөлөрдү изилдөөнүн Лагранж тибиндеги калдык мүчөдөн башка:

$R_n(x) = o((x - x_0)^{n-1})$ –Пеано,

$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}[x_0 + \theta(x - x_0)] -$ Коши тибиндеги калдык мүчөлөрдү да айта кетебиз $(0 < \theta < 1)$.

$f(x)$ функциясын (9.42) көрүнүштө көп мүчөгө ажыратып жазууну Тейлордун формуласы деп атап, аны калдык мүчөлөр жетишерлик (чексиз) кичине функциялар болгондо гана туура деп эсептейбиз.

$x_0 = 0$ болгон учурда (9.42) Маклорендин көп мүчөсү деп аталып,

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 +$$

$$+\frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^n + \frac{f^{(n)}(\theta\Delta x)}{n!} \cdot x^n \qquad (9.43)$$

көрүнүштө жазылат.

Ошентип $f(x)$ функциясы $x = x_0$ чекитинде $n-$тартипке чейинки туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болсо, анда бул чекитке жетишерлик жакын x чекиттеринде $f(x)$ ти айрым каталыктарга жол коюу менен, коэффициенттери функция менен, анын туундуларынын x_0 чекитиндеги маанилери болгон көп мүчө менен алмаштыра

$f(x) = f(x_0) + R_0(x)$ алабыз.

Мисалы, $C^1(x_0 - \Delta x\,, x_0 + \Delta x)$ мейкиндигинде $f(x)$ ти биринчи тартиптеги көп мүчө менен алмаштырса болот:

$f(x) \in C^1(x_0 - \Delta x\,, x_0 + \Delta x\,) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x)(x-x_0)$.
Ошондой эле, $C^2(x_0 - \Delta x\,, x_0 + \Delta x\,)$ мейкиндигинде

$f(x) \in C^2(x_0 - \Delta x\,, x_0 + \Delta x\,) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) +$

$+\frac{f''(x_0+\theta\Delta x)}{2!} \cdot (x - x_0)^2$ менен, ал эми

$f(x) \in C^3(x_0 - \Delta x\,, x_0 + \Delta x\,) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) +$

$+\frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0+\theta\Delta x)}{3!} \cdot (x - x_0)^3$ менен ж.б.у.с., $f(x) \in C^n(x_0 - \Delta x\,, x_0 + \Delta x\,)$ болсо, $f(x)$ ти (9.42) сыяктуу ажыраган көп мүчө менен алмаштырууга болот.

7. Мисалдар.

1) Маклорендин формуласы боюнча $\operatorname{tg} x$ функциясын $x_0 = 0$ чекитинде, үчүнчү тартиптеги калдык мүчөсү менен ажыраткыла.

Чыгаруу: ►$\operatorname{tg} x$ функциясын үчүнчү тартипке чейинки туундулары $\operatorname{tg} x \in C^3\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ гана керек болгондуктан, берилген чекитте үчүнчү тартиптеги туундуларына чейин эсептеп чыгалы :

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{cos^2 x} = cos^{-2} x \ ,$$

$$(\operatorname{tg} x)'' = 2cos^{-3} x \cdot \sin x \ ,$$

$(\operatorname{tg} x)''' = 6\, cos^{-4} x \cdot sin^2 x + 2cos^{-2} x$. Мындан $a_0 = \operatorname{tg} 0 = 0,$

$a_1 = (\operatorname{tg} x)'|_{x_0=0} = 1,\quad a_2 = (\operatorname{tg} x)''|_{x_0=0} = 0,\quad a_3 = (\operatorname{tg} x)'''|_{x_0=0} = 2$ коэффициенттерин таап, (9.43) формуласын негизинде үчүнчү тариптеги Лагранж тибиндеги калдык мүчөсү менен $\operatorname{tg} x$ функциясын

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} \cdot [3\, cos^{-4}(\theta\Delta x) \cdot sin^2(\theta\Delta x) + 2cos^{-2}(\theta\Delta x\ )]$$

$x_0 = 0$ чекитиндеги Маклорендик ажыралышын алабыз.◄

2) $0 \le x \le 1$ аралыгындагы $\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ жакындаштырылган ажыралуусун абсолюттук катасын баалагыла.

Чыгаруу: ►$\mathrm{e}^x \in C^{n+1}(R)$ болгону менен бизге каталыкты [0, 1] аралыгында гана баалоо тапшырмасы берилгендиктен, $(n+1) -$ тартиптеги туундусу $(\mathrm{e}^x)^{(n+1)} = \mathrm{e}^x$ өзүнө барабар болуп, $x_0 = 0$ чекитиндеги $(n+1) -$ тартиптеги Лагранж тибиндеги калдык мүчө

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!} \cdot (x - x_0)^{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \mathrm{e}^{\theta\Delta x} \qquad (0 < \theta < 1)$$

көрүнүштө болот. Мындан калдык мүчө, көрсөтүлгөн аралыкта өсүүчү экедигин байкап, x менен $\theta\Delta x$ өзгөрүлмөлөрүнө көрсөтүлгөн аралыктагы эң чоң маанилерди берүү менен, $0 \le x \le 1$ болгон учурда

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \mathrm{e}^{\theta\Delta x}\right| \le \left|\frac{(1)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \cdot |\mathrm{e}^1| = \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}\ ,$$

кетирилген абсолюттук каталыктын сандык бааланышын алабыз.◄

3) $\sin x$ функциясын $n-$ тартиптеги туундусу

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ көрүнүштө болуп, $x = 0$ чекитинде $n = 2k -$ жуп сан болгондо нөлгө барабар, ал эми $n = 2k - 1$ так сан болгондо бирде $"-1"$, бирде "+1" же $(-1)^{k-1}$ маанилерине ээ болгондуктан $(k = 1, 2, \ldots, n)$, берилген функцияны Маклорендин формуласы боюнча

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x) \qquad (9.44)$$

көрүнүштө ажыратууга болот. $\sin x \in C^n(R)$ болгондуктан, (9.44) ажыралышы R= $]-\infty, +\infty[$ аралыгында туура болот.

4) Жогорудагыдай эле талкуулоо менен $\cos x \in C^n(R)$ функциясын да, R= $]-\infty, +\infty[$ аралыгында

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)} + R_{2k+2}(x) \qquad (9.45)$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ Маклорендин көп мүчөсүнө ажыратууга болот.

5) Ошондой эле $]-1,\ 1]$ жарым интервалында

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + R_{n+1}(x) \qquad (9.46)$$

ажыралышын, ал эми $]-1,\ 1[$ интервалында

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!}\cdot x^k + R_{n+1}(x) \quad (9.47)$$

ажыралышын туура экендигин көрсөтүүгө болот.

§9.8 Предел эсептөөдө туундуну колдонуу

9.8.1 Лопиталдын эрежелери

Функциялардын пределдерин эсептөөдө келип чыккан аныксыздыктарды алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жана "сонун пределдердин" жардамы менен ачуу ыкмаларына (7 – гл., 7.2.1 ; 8- гл., 8.2.1) мурда токтолгонбуз. Азыр болсо, функциялардын туундуларын пайдаланып, Лопиталдын эрежелери деп аталуучу айрым ыкмалар менен аныксыздыктарды ачууну карайбыз.

I. $\left(\frac{0}{0}\right)$ – аныксыздыгын ачуу.

Айталы $x \to a$ умтулганда $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларын экөөсү тең 0 санына умтулушуп, алардын $\frac{f(x)}{g(x)}$ катышы $\left(\frac{0}{0}\right)$ көрүнүштөгү аныксыздык болсун.

9.9 Теорема. *Эгерде $[a,\ b]$ сегментинде аныкталышкан $f(x)$ жана $g(x)$ функциялары төмөндөгүдөй шарттарды канаттандырышса:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ пределдерине ээ болушса;

2) Экөөсүн тең $x = a$ чекитинде $f'(a)$ жана $g'(a)$ чектүү туундулары жашап, $g'(a) \neq 0$ болсо.

Анда $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ *(9.48)*

теңдештиги орун алат.

Далилдөө: ► $x = a$ чекитинде $f'(a)$ жана $g'(a)$ чектүү туундуларын жашашы, эки функциянын тең бул чекитте үзгүлтүксүз экендигин билдирет. Ошондуктан алардын $x = a$ чекитиндеги предели, функциялардын ушул чекиттеги маанилери менен дал келет. Демек теоремадагы 1) – шартты

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = f(a),\quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0 = g(a)$ деп түшүнүүгө болот. Теоремадагы $g'(a) \neq 0$ шартынан, a чекитин жакынкы чеке белинде жайгашкан x чекиттеринде $g(x) \neq 0$ экендиги келип чыгат. Анткени туундунун аныктамасы боюнча

$g'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{x-a}$ болгондуктан, $g(x) = 0$ десек пределдин мааниси катарында $g'(a) = 0$ болору келип чыгып, теореманын шартына каршы келет. Демек a чекитинин жакынкы чеке белинде, бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгон $\frac{f(x)}{g(x)}$ бөлчөгү жашай алат деген тыянакка келип, аны

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$ көрүнүштө өзгөртүп жазабыз. Мындан пределге өтүп,

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$, теореманын кортундусун далилдеген болобуз.

Мисалы $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}}$ пределин эсепегиле.

Эсептөө: $f(x)=\sin x$ жана $g(x)=e^x-e^{-x}$ функциялары $x=0$ чекитинде 9.9 – теореманын шарттарын канааттандырат.

$f'(x)=\cos x$, $f'(0)=1$; $g'(x)=e^x+e^{-x}$, $g'(0)=2$ болгондуктан, берилген предел

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-e^{-x}}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{1}{2}$ маанисине ээ болот.

Эгерде бир эле мезгилде $f'(a)=0$, $g'(a)=0$ болсо, 9.9 – теоремасын колдоно албайбыз. Ошондуктан ал теореманы жогорку тартиптеги туундуларга жалпылоо менен кеңейтебиз.

9.10 Теорема. *Айталы,* $f(x)$ *жана* $g(x)$ *функциялары* $[a,\ b]$ *сегментинде аныкталышып, төмөндөгүдөй шарттарды канааттандырышсын:*

1) $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$;

2) $[a,\ b]$ *сегментинде* $(n-1)-$ *тартипке чейинки* $f'(x)$, $f''(x),\dots,f^{(n-1)}(x)$ *жана* $g'(x)$, $g''(x),\dots,$ $g^{(n-1)}(x)$ *чектүү туундулары жашайт;*

3) $x=a$ *чекитинде* $(n-1)-$ *тартипке чейинки туундулардын бардыгы нөлгө айланышат;*

4) $x = a$ чекитинде $n -$ тартиптеги $f^{(n)}(a)$, $g^{(n)}(a)$ *туундулары жашап,* $g^{(n)}(a) \neq 0$ *шарты аткарылат.*

Анда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$ *(9.49)*

теңдештиги орун алат.

Далилдөө:

►$]a,\ b] = \{a < x \leq b\}$ жарым интервалында берилген $f(x)$ жана $g(x)$ функцияларын, $x = a$ чекитинин жакынкы чеке белинде Тейлордун көп мүчөсүнө ажыраталы. $n -$ тартиптеги Лагранж тибиндеги калдык мүчөсү менен теореманын 3) – шартын эске алып, (9.42) формуласын негизинде бул ажыралыштарды

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta\Delta x)}{n!} \cdot (x-a)^n\ ,\ \ g(x) = \frac{g^{(n)}(a+\theta\Delta x)}{n!} \cdot (x-a)^n$$

көрүнүштөрдө жаза алабыз. Теореманын 4) – шарты боюнча $g^{(n)}(a) \neq 0$ болгондуктан, $g(x)$ тин табылган ажыралышына карап, a чекитине жетишерлик жакын x чекиттеринде $g(x) \neq 0$ болоруна ишенебиз. Демек, мындай x чекиттеринде бөлүмү нөлдөн айырмалуу болгон $\frac{f(x)}{g(x)}$ бөлчөгү жашап, анын предели $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\frac{f^{(n)}(a+\theta\Delta x)}{n!} \cdot (x-a)^n}{\frac{g^{(n)}(a+\theta\Delta x)}{n!} \cdot (x-a)^n} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f^{(n)}(a+\theta\Delta x)}{g^{(n)}(a+\theta\Delta x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$ көрүнүштө эсептелип ($x \to a \Leftrightarrow \Delta x = (x-a) \to 0$), теорема далилденген болот.◄

Функциялардын пределдерин эсептөөдө 9.9 жана 9.10 – теоремаларды төмөнкү ыраатта эсте сактоо ыңгайлуу.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'''(x)}{g'''(x)} \left(\frac{0}{0}\right) \Rightarrow$$

$$\ldots \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = К = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (9.50)$$

Анткени алгачкы туюнтма $\left(\frac{0}{0}\right)$ аныксыздыгы болсо, биринчи тартиптеги туундаларынан түзүлгөн бөлчөктүн пределин, эгерде ал да

$\left(\frac{0}{0}\right)$ аныксыздыгы болсо, экинчи тартиптеги туундуларынан түзүлгөн бөлчөктүн пределин эсептейбиз (ж.б.у.с., улантылып олтурулат). Бирок (9.50) теңдештиги бир учурда бардык туундулар үчүн орун алат деп түшүнүү туура эмес. Эгерде теңдештиктеги алгачкы туюнтмадан предел табылса (жашаса), кийинкилери жашабай калышы да мүмкүн. Биринчи аныксыздык ачылбай, экинчисин ачуу мүмкүн болсо, андан кийинкилери жашабай кала бериши мүмкүн ж.б.у.с.

8. Мисалдар.

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}x-x)'}{(x-\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2x}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left\{\frac{1}{cos^2x}\left[\frac{1-cos^2x}{1-\cos x}\right]\right\}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{cos^2x}=2$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\ \left(\frac{0}{0}\right)$ аныксыздыгын ачкыла.

Ачуу: $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$, $\ \mathrm{g}(x)=x-\sin x$ дейли. Анда

$f(0)=0, \mathrm{g}(0)=0$ жана

$f'(x)=e^x+e^{-x}-2$, $f'(0)=0;\quad \mathrm{g}'(x)=1-\cos x,\ \mathrm{g}'(0)=0;$

$f''(x)=e^x-e^{-x},\ f''(0)=0;\quad \mathrm{g}''(x)=\sin x,\quad \mathrm{g}''(0)=0$;

$f'''(x)=e^x+e^{-x},\quad f'''(0)=2;\quad \mathrm{g}'''(x)=\cos x,\quad \mathrm{g}'''(0)=1$ маанилерине ээ болушат. Демек берилге предел

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\ \left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$ көрүнүштө эсептелет.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)\le\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+0=1$ чектүү предели жашаганы менен,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+cosx)=\mathrm{p}$ предели бир маанилүү табылбайт же жашабайт. Анткени $\forall x\in R\colon |cosx|\le 1$ болгондуктан, р саны $[-1,\ 1]$ аралыгындагы ар кандай сандарга тең боло бериши мүмкүн.

9.9 жана 9.10 – теоремаларын $a = \pm\infty$ болгон учурларда $x = \frac{1}{t}$ белгилөөсүн жардамы менен $t = \frac{1}{x} \to 0$ умтуларын эске алып,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'(\frac{1}{t})}\;; \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0-}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to0-}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'(\frac{1}{t})}$$

көрүнүштөрүндө пайдаланууга болот.

II. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ **– аныксыздыгын ачуу.**

9.10 Теорема. $]a,\ b]$ *жарым интервалында аныкталышкан* $f(x)$ *жана* $g(x)$ *функциялары берилип :*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ *пределдерине ээ болушсун;*

2) $]a,\ b]$ *жарым интервалында чектүү* $f'(x)$, $g'(x)$ *туундулары жашашсын;*

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = К$ *предели жашаса (К – чектелген же чектелбеген сан боло бериши мүмкүн) .*

Анда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *предели да жашап,* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = К$ *теңдештиги орун алат.*

Теореманы далилдөөсүз кабыл алып, мисалдарды иштеп көрсөтөбүз.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^{\mu})'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^{\mu}} = 0$ $(\mu > 0$ болсо).

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x^{\mu})'}{(a^{x})'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}\ln a} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot(x^{\mu-1})'}{\ln a\cdot(a^{x})'} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot(\mu-1)(x^{\mu-2})'}{(\ln a)^{2}\cdot(a^{x})'} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mu\cdot(\mu-1)\cdot(\mu-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot(x)'}{(\ln a)^{\mu-1}\cdot(a^{x})'} = \frac{\mu\cdot(\mu-1)\cdot(\mu-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(\ln a)^{\mu}\cdot a^{\infty}} = 0.$$

Мында $a > 1,\ \mu \in N$ деп алынат.

9.8.2 Лопиталдын эрежесин кеңейтүү ыкмалары

1) $(0\cdot\infty)-$ аныксыздыгын $\left(\frac{0}{0}\right)$ же $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ аныксыздыктарына келтирип, Лопиталдын эрежелерин колдонууга болот. Чынында эле

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ \ \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ пределдерине ээ болушса анда алардын көбөйтүндүсүн

$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ көрүнүштөргө өзгөртүп түзүүгө болот.

2) $(\infty-\infty)-$ аныксыздыгын да өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен

$\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)](\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)$ көрүнүшкө келтире алабыз.

3) $1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$ – аныксыздыктарын ачуу үчүн, предел алдындагы функцияны натуралдык негизде логарифмдөө сунуш кылынат. Чынында эле

$y=[f(x)]^{g(x)}$ функциясын логарифмдеген соң ,

$\ln y=\ln[f(x)]^{g(x)}=g(x)\cdot\ln f(x)$ көрүнүшкө өзгөрүп,

$\lim\limits_{x\to a}\ln[f(x)]^{g(x)}$ – предели болсо, жогоруда каралган учурлардын бирине $\lim\limits_{x\to a}[g(x)\cdot\ln f(x)]$ келет (көбүнчө $0\cdot\infty$).

9. Мисалдар.

1) $\lim\limits_{x\to 0+}(x^{\mu}\cdot\ln x)(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{(x^{-\mu})'}=$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{\mu}}{-\mu}=0.$$

Бул жерде $\mu>0,\ \mu\in R$ деп алынат.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctg^2x-\frac{1}{x}\right)(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot cos^2x-sin^2x}{x^2\cdot sin^2x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot sin^2 x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot sin^2 x}\left(\frac{0}{0}\right);$$

Берилген $(\infty-\infty)-$ аныксыздыгын, эки $\left(\frac{0}{0}\right)$ түрүндөгү аныксыздыктардын көбөйтүндүсүнө өзгөртүп түздүк. Алардын биринчиси

$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=1+1=2$, ал эми экинчиси

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\cdot sin^2 x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\cdot sin^2 x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot\sin x}{sin^2 x+2x\cdot\sin x\cdot\cos x}=$$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}=\frac{-1}{1+2\cdot 1}=-\frac{1}{3}$ болуп, мисалдагы пределдин мааниси

$\lim_{x\to 0}\left(ctg^2 x-\frac{1}{x}\right)=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ санына барабар болот.

3) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ (1^∞) пределин эсептегиле.

Эсептөө : ► $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ белгилөөсүн киргизип (ал жуп функция), аны негизи $e-$ натуралдык саны боюнча логарифмдейли, анда

$\ln y=\frac{1}{1-\cos x}\cdot\ln\frac{\sin x}{x}=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}$ туюнтмасына ээ болобуз ($x>0$ болсо гана $\ln x$ жашайт). Мындан Лопиталдын эрежесин пайдалансак,

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x-\ln x)'}{(1-\cos x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{sin\, x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x\cdot sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x^3\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\sim\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-x}{x^3}=$$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\sim-2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{x^2}=-\frac{1}{2}$ келип чыгып,

$\lim_{x\to 0}y=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$ пределине ээ болобуз.◄

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-arctg\, x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\ (0^0)$ – аныксыздыгын ачкыла.

Ачуу: ►$y=\left(\frac{\pi}{2}-arctg\, x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ белгилөөсүн киргизип, e негизи боюнча логарифмдеп Лопиталдын эрежесин колдонолу. Анда

$$\lim_{x\to+\infty}\ln y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctg\, x\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctg\, x\right)\right]'}{(\ln x)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{\frac{\pi}{2}-arctg\, x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{arctg\, x\ -\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'}{\left(arctg\, x\ -\frac{\pi}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=-1 \text{ ээ болуп,}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=e^{-1}=\frac{1}{e}$ жообун алабыз.◄

5) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sin\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'\cdot\cos\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\ \cos\frac{1}{x}=\cos 0=1.$$

6) $$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1.$$

7) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

8) $$\lim_{x\to0}x^2e^{\frac{1}{x^2}}(0\cdot\infty)=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty.$$

9) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{tg\, x}\right)(\infty-\infty)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x}=0.$$

10) $$\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\frac{1}{x^4}}\ (1^\infty)=\lim_{x\to0}e^{\ln(1+x^2)^{\frac{1}{x^4}}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(1+x^2)}{x^4}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^4}\left(\frac{0}{0}\right)}=$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x^2))'}{(x^4)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{4x^3}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x^2(1+x^2)}} = e^{+\infty} = +\infty.$$

$$11)\ \lim_{x\to 0+} x^x\ (0^0) = \left| \begin{array}{c} x^x = e^{\ln x^x} = \\ = e^{x\ln x} = e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \\ \text{деп алып} \end{array} \right| = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}(-x)} = e^0 = 1.$$

Эскертүү. *Аныксыздыктарды ачууда Лопиталдын эрежесин ордуна* $x = a$ *чекитиндеги* $f(x)$ жана $g(x)$ *функцияларын Тейлордун формуласы боюнча* $f(x) = P_n(x)$, $g(x) = Q_n(x)$ *көп мүчөлөргө ажыратып,*

$\underset{x\to a}{Lim}\frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{Lim}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ *алымы жана бөлүмү көп мүчөлөр болгон бөлчөктүн предели катарында эсептөөгө да болот.*

§9.9 Туундуларды колдонуп функцияларды изилдөө жана графигин тургузуу

9.9.1 Функциянын өсүү, кемүү аралыктары, экстремумдары жана эң чоң (кичине) маанилери

1. Өсүү кемүү аралыктары.

Функциянын монтондуу өсүү (кемүү) аралыктары 6.2 – аныктаманын (6 – гл.) аткарылуусуна жараша аныкталып, берилген аралыкта үзгүлтүксүз туундулары жашап $f'(x) > 0$ болгондо, ошол аралыкта $f(x)$ монотондуу шыдыр өсүүчү, ал эми туундусу $f'(x) < 0$ терс болсо монотондуу шыдыр кемүүчү болору 9.7 – теоремада далилденген. Ошондуктан функциянын монотондуулук аралыктарын аныктоо үчүн, анын туундусун белгилерин өзгөрүү аралыктарын тактайбыз. Демек, монотондуулуктун жетиштүү шарты катарында $f'(x)$ тин белгилери алынат:

1) $f'(x)$ тин белгиси $(+)$ болгон аралыкта $f(x)$ шыдыр өсүүчү;

2) $f'(x)$ тин белгиси $(-)$ болгон аралыкта $f(x)$ шыдыр кемүүчү;

3) $f'(x) \equiv 0$ болгон аралыкта $f(x)$ турактуу (өспөөчү же кемибөөчү)

абалдарда болот.

2. Функциянын экстремумдары жана эң чоң (кичине) маанилери.

Берилген аралыкта $f(x)$ функциясын чектелген болушу, 6.1 – аныктамага (6 – гл.) ылайык аныкталып, туюк аралыкта үзгүлтүксүз болгон функциянын сөзсүз чектелген болору Вейерштрасстын 8.5 – теоремасында (8 – гл.) далилденген. Ал темаларда функция аныкталган жана үзгүлтүксүз болгон жалпы аралык жөнүндө сөз болуп, бир чекиттин айланасындагы локалдык (кичине) аралыкчалар каралган эмес.

9.6 Аныктама. *Эгерде $f(x)$ функциясын аныкталуу областынан кандайдыр бир x_0 чекити берилип, функциянын ушул чекиттеги $f(x_0)$ мааниси, анын жетишерлик кичине $\delta -$чеке белинде жайгашкан бардык x чекиттеринде $f(x) \leq f(x_0) -$ эң чоң $(f(x) \geq f(x_0) -$ эң кичине) болсо, анда x_0 чекитин $f(x)$ функциясын $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ локалдык (кичинекей) аралыктагы максимум (минимум) чекити деп айтабыз. Ал эми функциянын x_0 чекитиндеги маанисин $f_{\text{макс.}} = f(x_0) -$ максималдык ($f_{\text{мин.}} = f(x_0) -$ минималдык) деп атайбыз.*

Функциянын максимум жана минимум чекиттерин жалпысынан экстремум чекиттери деп коёбуз. Ошентип, $f(x)$ функциясы аныкталуу областын ичинде бир канчалаган максимум жана минимум чекиттерине ээ болуп, айрым минимум чекиттериндеги маанилери кээ бир максимум чекиттериндеги маанилеринен чоң болуп калышы да мүмкүн. Бул функциянын максималдык (минималдык) маанилери жөнүндөгү 9.6 – аныктамага каршы келбейт. Анткени аныктамада даректүү бир x_0 чекитине жетишерлик жакын $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ локалдык аймак жөнүндө гана сөз болгон.

Эгерде $f(x)$ функциясы белгилүү бир $[a,\ b]$ сегментинде үзгүлтүксүз болсо, анда аралыктын $a,\ b -$ учтары экстремум чекиттери болбосо да, функциянын бул аралыктагы эң жогорку М жана эң төмөнкү m чектери же маанилери :

$$M = \sup\{f(x)\} = max\{f(a), f(b),\ f_{\text{макс.}} = f(x_i),\ f_{\text{мин.}} = f(x_i)\},$$

$$m = \inf\{f(x)\} = min\{f(a), f(b),\ f_{\text{макс.}} = f(x_i),\ f_{\text{мин.}} = f(x_i)\} \qquad (9.51)$$

функциянын аралыктын учтарындагы жана бардык $x_i -$ экстремум чекиттериндеги маанилерин салыштыруу менен аныкталат.

Экстремумдун жашашын зарыл шарты: Ферманын 9.3 – теоремасында баяндалгандай $f(x)$ функциясы x_0 чекитинде эң жогорку жана эң төмөнкү маанилерге жетсе, анда бул чекиттеги туундусу $f'(x_0) = 0$ болот. Демек x_0 чекитинде туундусун нөлгө тең болушу, бул чекиттин локалдык же чоң аралыктагы экстремум чекити болушуна кепилдик бербестен, болгону экстремум чекитинде туундусу нөлгө барабар деген кортундуну берет. Ошондуктан $f'(x) = 0$ теңдемесин чечимдерин, экстремум болууга шектелген чекиттер (критикалык же стационардык чекиттер) деп атайбыз. **Экстремумга шектелген чекиттерге функциянын туундусу жашабаган чекиттер да кирет**. Анткени сынуу чекиттеринде функциянын туундусу жашабаганы менен өзү үзгүлтүксүз болуп, графиги курч нерсенин мизи сыяктуу чокуларга окшогон экстремум чекиттер болуп калышы мүмкүн (9.1.3, $7^0, 9.10 - 9.11 -$ чиймелер). **Ошондуктан, экстремум чекитинде туундунун нөлгө тең болуу жана жашабоо шарттарын – экстремумдун жашашынын зарыл шарты деп эсептейбиз.**

Экстремумдун жашашынын жетиштүү шарты: $f'(x_0) = 0$ шартынын аткарылышы, x_0 чекитинин экстремумга шектелген чекит экендигинен гана кабар берип, анын экстремум чекити болорун көрсөтүү үчүн кошумча иликтөөлөрдү жүргүзүүгө туура келет. Атап айтканда x_0 чекитинин өзүндө $f'(x_0) = 0$ болгонун билген соң, $f'(x)$ туундусун белгилерин x_0 гө жетишерлик жакын $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) -$ аймакчанын x чекиттериндеги өзгөрүүсүн карайбыз:

1)Айталы x чекити x_0 чекитин сол жагында жайгашып, туундусу $f'(x) > 0\ (+)$ белгиде болсун, анда $f(x)$ функциясы 9.7 – теорема боюнча $(x_0 - \delta,\ x_0)$ аралыгында шыдыр монотондуу өсүүчү болот. Ал эми оң жагында $x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) < 0$ же $(-)$ белгиде болсун, анда бул аралыкта $f(x)$ шыдыр монотондуу кемүүчү болот. Бул учурда $f(x)$ функциясы x_0 чекитине чейин өсүп, андан кийин кемип кетерин байкайбыз. Демек, $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ чеке белинде $f(x_0) \geq f(x)$ шарты аткарылып, $f(x_0)$ 9.6 – аныктаманын негизинде x_0 локалдык максимум чекити болот.

2) Ошондой эле $x \in (x_0 - \delta,\ x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$ же $(-)$, ал эми $x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$ же $(+)$ белгилерде болушса, анда x_0 чекити локалдык минимум чекити болот.

3) $(x_0 - \delta,\ x_0 + \delta) -$ чеке белинде $f'(x)$ туундусун белгиси өзгөрбөсө, анда x_0 чекитинде функция экстремумга ээ болбойт.

4) $f'(x_0)$ туундусу жашабаган x_0 – шектүү чекиттери аркылуу өткөн кездеги $f'(x)$ тин белгилеринин өзгөрүшү да жогорудагыдай текшерилип, бул чекиттин экстремум чекит болор – болбосу аныкталат.

Ошентип **экстремумдун жашашынын жетиштүү шарты деп, экстремумга шектелген ар бир x_0 чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ туундусунун белгилеринин өзгөрүшүн айтабыз.**

Жетиштүү шартты таблицаларда көрсөтөлү :

1-таблица. x	$x_0 - \delta < x < x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$
$f'(x)$	$+$	0 , же жашабайт	$-$
$f(x)$	Өсөт	Локалдык максимум	Кемийт

2-таблица. x	$x_0 - \delta < x < \ x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$
$f'(x)$	$-$	0 , же жашабайт	$+$
$f(x)$	Кемийт	Локалдык минимум	Өсөт

3-таблица. x	$x_0 - \delta < x < \ x_0$	$x = x_0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$
$f'(x)$	$+$	0 , же жашабайт	$+$
$f(x)$	Өсөт	Экстремум жок	Өсөт
$f'(x)$	$-$	0 , же жашабайт	$-$

$f(x)$	Кемийт	Экстремум жок	Кемийт

Эгерде 1), 2), 3) – таблицалар x_0 чекитинин жакынкы $\delta -$ чеке белинде гана эмес, функциянын бүтүндөй аныкталуу областында аткарылса, анда x_0 чекити функциянын жалгыз гана экстремум чекити болот.

10. Мисалдар.

1) $f(x) = x^2(x-1)$ функциясын өсүү, кемүү аралыктарын жана экстремумдарын тапкыла.

Чыгаруу : $f'(x) = [x^2(x-1)]' = 2x\cdot(x-1) + x^2\cdot 1 = x\cdot(3x-2)$ туундусун эсептеп, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\cdot(3x-2) = 0$ теңдемесинен зарыл шартты канааттандырып, экстремумга шектелишкен $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}$ стационардык чекиттерин табабыз. Функциянын туундусу жашабаган чекиттер жок болгондуктан, табылган эки стационардык чекиттер аркылуу өткөндө $f'(x)$ туундусун белгисин өзгөрүшүн же экстремумдун жашашын жетишерлик шартын текшеребиз.

1) $x \in\ ]-\infty,\ 0[\ \Rightarrow\ f'(x) = x\cdot(3x-2) > 0$ оң болот. Анткени бул аралыкта эки көбөйтүүчү тең терс болушуп, алардын көбөйтүндүсү оң сан болот .

2) $x \in \left]0,\ \frac{2}{3}\right[\ \Rightarrow\ f'(x) = x\cdot(3x-2) < 0,$ анткени биринчи көбйтүүчү оң, экинчиси терс.

3) $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[\ \Rightarrow\ f'(x) = x\cdot(3x-2) > 0,$ анткени эки көбөйтүүчү тең оң. Бул маалыматтарды таблицага түшүрүп, 1, 2 – таблицалардын негизинде

x	$x \in\ ]-\infty, 0\ [$	$x = 0$	$x \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$	$x = \frac{2}{3}$	$x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	өсөт	Локалдык максимум $f(0)=0$	кемийт	Локалдык минимум $f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27}$	өсөт

функциянын өсүү, кемүү аралыктарын жана локалдык максимум, минимум чекиттерин, бул экстремум чекиттериндеги максималдык, минималдык маанилерин табабыз.

4) Тике цилиндр формасындагы идиштин көлөмү $-\mathrm{V}_0$ (турактуу), бийиктиги $-$ h, радиусу – r болсун. Сыйымдуулугу V_0 болгон цилиндр идишин жасоо үчүн жалпы аянты S болгон тыныке материал сарпталган. Тыныке материалын үнөмдөп эң аз сарптоо үчүн, цилиндрдин h бийиктиги менен диаметрин кандай катышта алуу керек.

Чыгаруу: ►Геометриядан белгилүү болгондой цилиндрдин толук бети $\mathrm{S}_{\text{т.б.}}=2\pi\mathrm{r}^2+2\pi\mathrm{r}\cdot\mathrm{h}$, ал эми көлөмү $\mathrm{V}_0=\pi\mathrm{r}^2\mathrm{h}$ формуласы менен эсептелип, экинчисинен табылуучу $\mathrm{h}=\frac{\mathrm{V}_0}{\pi\mathrm{r}^2}$ маанисин биринчиге койгон соң, толук беттин r ге карата $\mathrm{S}_{\text{т.б.}}=2\left(\pi\mathrm{r}^2+\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{r}}\right)=\mathrm{S}(\mathrm{r})$ функция болорун көрөбүз. Бул функциянын $\mathrm{r}\in\,]0,+\infty[$ аралыгындагы эң кичине маанисин табалы. Туундусун эсептеп

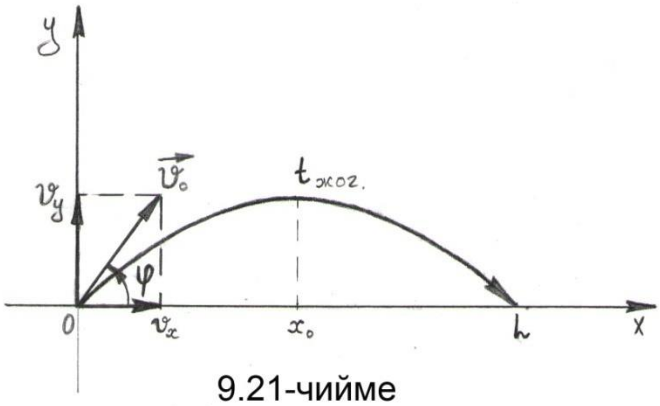
$$\frac{dS}{d\mathrm{r}}=\left[2\left(\pi\mathrm{r}^2+\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{r}}\right)\right]'_{\mathrm{r}}=2\left(2\pi\mathrm{r}-\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{r}^2}\right),\qquad \mathrm{S}'(\mathrm{r})=0\Leftrightarrow\qquad 2\pi\mathrm{r}-\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{r}^2}=0$$

теңдемесинен, $\mathrm{r}_1=\sqrt[3]{\frac{\mathrm{V}_0}{2\pi}}$ экстремумга шектелген стационардык чекитин табабыз. Функциянын туундусу жашабаган $\mathrm{r}_2=0$ чекитин экинчи экстремумга шектелген чекит катарында алуунун зарылчылыгы жок, анткени радиусу нөл болгон цилиндр жасалбайт. Функциянын $]0,+\infty[$ аралыгындагы эң кичине маанисин (9.51) эрежеси боюнча тандайбыз. $\mathrm{S}(\mathrm{r})=2\left(\pi\mathrm{r}^2+\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{r}}\right)$ функциясын аралыктын учтарындагы маанилерин пределдик абалдары

$\lim\limits_{r\to0+}2\left(\pi\mathrm{r}^2+\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{r}}\right)=+\infty,\quad \lim\limits_{r\to+\infty}2\left(\pi\mathrm{r}^2+\frac{\mathrm{V}_0}{\mathrm{r}}\right)=+\infty$ болгондуктан,

$$m = \inf\{S(r)\} = min\left\{+\infty, +\infty,\ S\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)\right\} = S\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right) = S_{мин.}$$

минимум абалына $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}$ чекитинде жетет. Мындан $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$ барабрдыгына r_1 дин маанисин коюп, $h_1 = \frac{V_0}{\pi\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}\right)^2} = \sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}} = \sqrt[3]{4}\, r_1$ байланышын табабыз. Демек, материалды үнөмдөө үчүн цилиндрдин диаметри менен бийиктигин узундуктарын барабар кылып $h_1 = \sqrt[3]{4}\, r_1$ көрүнүштө тандоо зарыл. ◄



9.21-чийме

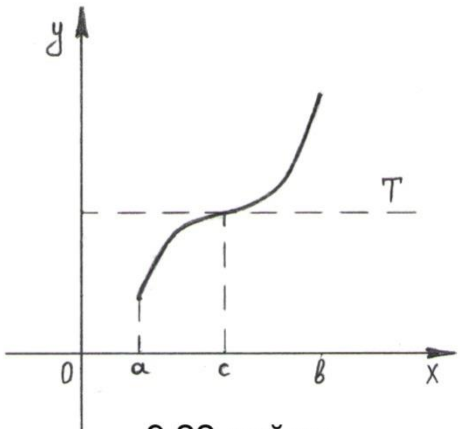
5) Багбан шлангадан $v_0 -$ баштапкы ылдамдыгы менен агып чыгып жаткан суу менен бакчаны сугарууда. Шлангадан чыгып жаткан суу максималдык узак аралыкка чейин учуп жетиши үчүн, багбан шланганы горизонттон канчалык φ бурчуна кыйшайтып кармоосу керек.

Чыгаруу: ►Горизонттон φ бурчуна кыйшак учуп чыккан телонун (бизде суу тамчылары) учуу узактыгын математикалык жактан моделдештирели. Суу $Oxy -$ декарттык координаталар системасын О башталыш чекитинен чыгып, $L -$ суунун учуу узактыгы же сугаруу аралыгы, Т – суунун шлангадан чыгып жерге түшкөнгө чейинки толук учуу убактысы болсун. Суунун учуу жолу параболанын траекториясы боюнча жүрүп, анын убакыт бирдигиндеги $\vec{v}$ ылдамдык векторунун горизонталдык Ox огундагы проекциясы $\vec{v}_x = v_0 \cos\varphi$ турактуу саны, ал эми Oy огундагы вертикалдык проекциясы t убактысына жараша өзгөрүлмө

$\vec{v}_y = v_0 \sin\varphi - g\,t$ саны болот (9.21 – чийме). Мында $g \approx 9{,}8$ – оордук күчүн ылдамдануусу болуп, $g\,t = \left(\frac{g\cdot t^2}{2}\right)' -$ убакыттын ар бир t моментинде суу тамчыларын жерге тартып турган эркин түшүү ылдамдыгы (жолдон убакыт боюнча туундусу $0 \leq t \leq \mathrm{T}$) болот . Анда суу тамчылары Т – убактысынын ичинде горизонталдык багыт боюнча $L = \mathrm{T} \cdot v_0 \cos\varphi$ сугаруу аралыгына учуп жете алышат. Т – убактысы, суунун траектория боюнча чокуга жеткенге чейинки $t_{\text{жог.}} -$ жогорулоо убактысынан жана чокудан жерге түшкөнгө чейинки $t_{\text{төм.}} -$ ылдыйлап төмөндөө убактысынан $\mathrm{T} = t_{\text{жог.}} + t_{\text{төм.}}$ туруп, жогорулоо жана төмөндөө убактылары $t_{\text{жог.}} = t_{\text{төм.}}$ барабар болушсун дейли. Учуу траекториясынын чокусунда суунун көтөрүлүүсү токтогондуктан $\vec{v}_y = 0$ болуп, $v_0 \sin\varphi - \mathrm{g}\, t_{\text{жог.}} = 0$ теңдештигинен

$t_{\text{жог.}} = \frac{v_0 \sin\varphi}{\mathrm{g}}$ табабыз. $\mathrm{T} = 2 \cdot t_{\text{жог.}} = \frac{2\, v_0 \sin\varphi}{\mathrm{g}}$ маанисин сугаруу аралыгына коюп, $L = \frac{2\, v_0 \sin\varphi \cdot v_0 \cos\varphi}{\mathrm{g}} = \frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{\mathrm{g}} = L(\varphi),$ $\varphi \in \left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ функциясына же φ бурчуна жараша суунун учуу узактыгын математикалык моделине ээ болобуз. Табылган функциянын туундусун $L'(\varphi) = \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{\mathrm{g}}$ эсептеп, $L'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{\mathrm{g}} = 0$ теңдемесинен, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} -$ шектүү чекитин табабыз. $L(\varphi)$ функциясын эң чоң мааниси (9.51) эрежеси боюнча

$M = \sup\{L(\varphi)\} = max\left\{L(0), L\left(\frac{\pi}{2}\right), L\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\} = max\left\{0, 0, \frac{v_0^2}{\mathrm{g}}\right\} = \frac{v_0^2}{\mathrm{g}}$ келип чыгып, шланганы горизонттон жогору $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^0$ бурчка кыйшайтып кармаган учурда эң узун $L = \frac{v_0^2}{\mathrm{g}}$ сугаруу аралыгына жетерин көрөбүз.



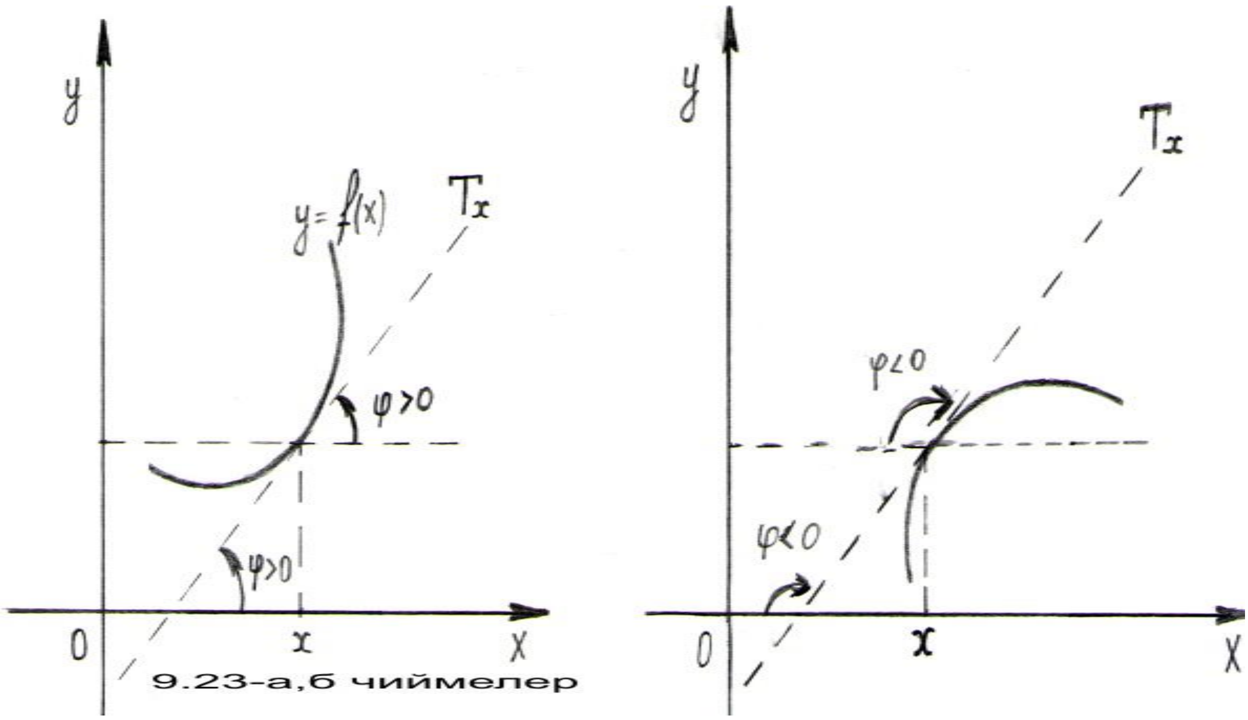
9.22-чийме

9.9.2 Функциянын графигинин иймектик (томпоктук) аралыктары

$[a,\ b]$ аралыгында аныкталган жана дифференцирленүүчү $y = f(x)$ функциясы берилип, анын графигине каалаган $\forall x \in [a,\ b]$ үчүн $\big(x;\ f(x)\big)$ чекитинен 6.6 – аныктамасы менен берилген (6 – гл.) жаныма сызыгын жүргүзүү мүмкүн болсун.

9.7 Аныктама. *Эгерде функциянын графиги, берилген аралыктын ар бир x чекиттерине карата аныкталып, графикте жайгашкан $\big(x;\ f(x)\big)$ чекиттеринен жүргүзүлгөн жаныма сызыктардын жогору (төмөн) жагында жайгашышса, анда функциянын бул аралыктагы графигин иймек (томпок) деп айтабыз.*

Айрым учурларда **иймек** графикти **төмөн багытка ийилген**, ал эми **томпок** графикти **жогору багытка ийилген** деп, график иймек же томпок болгон интервалдарды функциянын иймектик, томпоктук



9.23-а,б чиймелер

аралыктары деп атап келишет. Мисалы 9.22 – чиймеде $]a,$ с[интервалында томпок, ал эми]с, $b[$ интервалында иймек функциянын графиги көрсөтүлгөн.

Берилген аралыкта $y = f(x)$ функциясын графигинин иймектик жана томпоктук белгилери, ушул аралыктагы анын экинчи тартиптеги туундуларын белгилерине байланыштуу болорун көрсөтүүгө болот.

Графиктин иймек (томпок) болуусуна жетиштүү шарт.

9.11 Теорема. *Эгерде* $f(x) \in \mathrm{C}^2]a,\ b[$ *жана* $\forall x \in]a,\ b[$ *үчүн* $f''(x) > 0$ *болсо , анда* $f(x)$ *функциясын* $]a,\ b[$ *интервалындагы графиги иймек, ал эми* $f''(x) < 0$ *болсо томпок болушат.*

Далилдөө:

$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$ болгондуктан, каралган аралыкта $f''(x) > 0$ болгондо, туундусу $(+)$ белгидеги функция катары $f'(x)$ функциясы шыдыр монтондуу өсүүчү функция болот (9.7 – теорема). Экинчи жактан туундусу оң функция катарында $f'(x) > 0$ же $f'(x) = k_x = tg\,\varphi > 0$ болуп, $f(x)$ тин графигине $\left(x;\, f(x)\right)$чекитинен жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициентинин $k_x > 0 \Leftrightarrow 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ болуусу, же $0x$ огу менен T_x жанымасынын түзгөн φ бурчу оң, тар бурч болору келип чыгат. Мындай абал функциянын графиги жаныманын жогору жагында жайгашканда гана келип чыккандыктан, 9.7 – аныктаманын негизинде каралган аралыкта $f(x)$ тин графиги иймек болот деген жыйынтыкка келебиз. Ушундай эле талкуулоонун натыйжасында томпок учурун да далилдей алабыз. Бул учурда φ – терс, кең бурч болот (9.23 а), б) – чиймелер).

Далилденген теореманы пайдаланып, функциянын графигин иймектик жана томпоктук аралыктарын табуунун төмөндөгүдөй схемасын түзөбүз:

1) $f(x)$ *тин* $x = \text{c}$ *чекитинде экинчи тариптеги туундусун нөлгө* $f''(\text{c}) = 0$ *барабар болуусу же жашабай калышы, анын ийилүү аралыктарынын алмашуу же ийилүү чекити болушуна зарыл шарт болуп эсептелет***.**

2)$f''(x) = 0$ *теңдемесин* $x = \text{c}$ *чечимдери жана экинчи тартиптеги туундусу жашабаган чекиттер иймектик менен томпоктукка шектелген же экинчи тартиптеги туундусуна карата критикалык чекиттер деп аталып,* $]a,\ b[$ интервалы *ушул шектелген чекиттерге карата* $]a,\ b[=]a,\ \text{c}[\ \cup\ ]\text{c},\ b[$ *сыяктуу бөлүктөргө бөлүнөт. Бөлүнгөн бөлүктөрдөгү* $f''(x) -$ *экинчи тартиптеги туундусун белгилерин изилдейбиз.*

3) Эгерде $\forall x \in]a,\ \text{c}[$ *үчүн* $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ *болсо, анда бул аралыкта* $f(x)$ *тин графигин иймек (томпок) деп атайбыз.*

4*) Ошентип, шектелген* $x = \text{c}$ *чекити аркылуу өткөндө,* $f(x)$ *тин экинчи тартиптеги* $f''(x) -$ *туундусу өзүнүн белгисин өзгөртсө, б.а.* $f''(x)$ *тин белгиси* $(+)$ *тан* $(-)$ *ка өзгөрсө, анда* $x = \text{c}$ *чекитинде* *функциянын графиги ийилүү абалынан томпоюу абалына, ал эми* $f''(x)$ тин белгиси $(-)$ *тан* $(+)$ *ка өзгөрсө, анда графиги томпоюу абалынан ийилүү абалына (9.22 - чийме) өткөн болот. Бул учурда* $x = \text{c}$ *ийилүү чекити деп аталат.*

$f(x)$ функциясын иймектик томпоктук аралыктарын жана ийилүү чекитин таблицада көрсөтөлү :

4- таблица. x	$\forall x \in]a,\ \text{c}[$	$x = \text{c}$	$\forall x \in]\text{c},\ b[$
$f''(x)$	$f''(x) > 0$ же $(+)$	0 , же жашабайт	$f''(x) > 0$ же $(-)$
$f(x)$	иймек	Ийил. чекити	томпок

5- таблица. x	$\forall x \in]a,\ \text{c}[$	$x = \text{c}$	$\forall x \in]\text{c},\ b[$
$f''(x)$	$f''(x) < 0$ же $(-)$	0 , же жашабайт	$f''(x) > 0$ же $(+)$
$f(x)$	томпок	Ийил. чекити	иймек

6- таблица. x	$\forall x \in]a,\ \text{c}[$	$x = \text{c}$	$\forall x \in]\text{c},\ b[$

$f''(x)$	$f''(x) < 0\ (-)$	0 , же жашабайт	$f''(x) < 0$ $(-)$
$f(x)$	томпок	Бул ийилүү чекити аркылуу өткөндө $f''(x)$ тин белгиси өзгөрбөйт. Графиктин томпоктугу сакталат.	томпок
$f''(x)$	$f''(x) > 0\ (+)$	0 , же жашабайт	$f''(x)$ $> 0\ (+)$
$f(x)$	иймек	Бул ийилүү чекити аркылуу өткөндө $f''(x)$ тин белгиси өзгөрбөйт. Графиктин иймектиги сакталат.	иймек

11. Мисалдар.

1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ иймектик (томпоктук) интервалдарын жана ийилүү чекитин тапкыла.

Табуу: ►Берилген функциянын аныкталуу областы бүтүндөй R сан огу болуп, бул көптүктө биринчи, экинчи тартиптеги туундулары жашайт

$f'(x) = 4x^3 - 6x^2,\ \ f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x \cdot (x - 1)$. Мындан

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x \cdot (x - 1) = 0$ теңдемесин чыгарып, ийилүү чекитине шектелген $x_1 = 0, x_2 = 1$ эки чекиттерди табабыз. Аныкталуу областын

R$=]-\infty,\ 0[\cup]0,\ 1[\cup]1, +\infty[$ интервалдарына бөлөбүз. Эки сандардын көбөйтүндүсүн белгиси катарында $f''(x)$ тин белгилерин аныктап, жогорудагыдай таблица менен ийместик, томпоктук аралыктарын аныктайбыз:

x	$x \in]-\infty, 0[$	$x = 0$	$x \in]0, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	иймек	Ийилүү чекити	томпок	Ийилүү чекити	иймек

◄

2) $f(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ функциясын асимптоталарын жана иймектик томпоктук аралыктарын тапкыла.

Чыгаруу: ►Функциянын асимптоталары 6.5 – аныктаманын (6 – гл.) негизинде аныкталып, горизонталдык, жантык, вертикалдык деп үчкө бөлүнөрү жөнүндө сөз кылганбыз: Оy огуна параллель жайгашкан асимптоталар вертикалдык, 0x огуна параллель жайгашса горизонталдык, калгандарын жантык асимптоталар болушкан.

Функциянын асимптоталарын табуунун төмөндөгүдөй тартибин түзгөнбүз:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ чектүү предели жашаса, анда $y = b$ берилген функциянын горизонталдык асимптотасы болот. Ал эми $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ болсо, анда горизонталдык асимптотасы жок болуп, кошумча кийинки кадамдагы изилдөөгө өтөбүз.

Эгерде $y = kx + b$ түзү $y = f(x)$ функциясын жантык асимптотасы болсо, анда $x \to \pm\infty$ умтулганда алар бири – бирине чексиз жандаша жакындашып, чексиз алыстагы чекиттерге жеткенде дал келишет же айырмасын предели $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0$ деп ойлойбуз. Ошондуктан чексиз алыстатылган x чекиттеринде

$f(x) - (kx + b) \approx \alpha(x) -$ чексиз кичине чоңдук болот. Мындан $k \approx \frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x}$ же

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b+\alpha(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} - 0 = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad (9.52)$$

ошондой эле $b \approx f(x) - kx - \alpha(x)$ же

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx - \alpha(x)\ ] = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) \qquad (9.53)$$

коэффициенттерин табууга болот.

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ предели жашаса жантык асимптотасы бар, ал эми предели жашабаса жантык асимптотасы жок болуп, кийинки кадамдагы изилдөөнү улантабыз.

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx\ ) = b$ чектүү предели жашаса, анда жантык асимптотасы бар болуп, $y = kx + b$ теңдемеси менен жазылат. Эгерде чектүү предели жашабаса, анда асимптотасы жок функция болот. $k = 0$ болгон учурда жантык асимптота горизонталдык асимптотага айланат.

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ болсо, анда $x = a$ түзү вертикалдык асимптота болот.

Мисалдагы функциянын жантык асимптотасын издеп көрөлү. (9.52), (9.53) формулаларын пайдаланып, x оң багытка чексиз алыстаганда

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right) = 2,$$

$b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^2-1}{x} - 2x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ табабыз. x терс багытка карап чексиз $x \to -\infty$ алыстаганда да ушул эле пределдик маанилер табылгандыктан, коэффициенттерди асимптотанын теңдемесине коюп $y = 2x$ түзү жантык асимптота болорун көрөбүз.

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{2x^2-1}{x} = \lim_{x\to 0+}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = 0 - \infty = -\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

болгондуктан, $x = 0$ түзү вертикалдык асимптота болот.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = \infty$ болуп, горизонталдык асимптотага ээ болбойт.

Функциянын ийилүү чекиттеринин, иймектик томпоктук аралыктарын табуу үчүн, анын экинчи тартиптеги

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-1}{x}\right)' = \frac{(2x^2-1)'\cdot x - (x)'\cdot(2x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2+1}{x^2}\ ,$$

$f''(x) = \left(\frac{2x^2+1}{x^2}\right)' = \frac{4x\cdot x^2 - 2x\cdot(2x^2+1)}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$ туундуларын эсептейбиз. Бөлчөк алымы нөлгө тең $(-2 \neq 0)$ болгондо гана нөлгө барабар болгондуктан $f''(x) \neq 0$ келип чыгып, ийилүү чекитине шектелген чекит катарында экинчи тартиптеги туундусу жашабаган бир гана $x = 0$ чекити бар экендигин көрүп, функциянын аныкталуу областын $\mathrm{X} =]-\infty.\ 0[\, \cup\,]0, +\infty[$ интервалдарына бөлөбүз. $f''(x) = \frac{-2}{x^3}$ бөлчөгүн алымы терс болгондо, бөлүмү $x^3 < 0$ же $x < 0$ терс болсо, анда $f''(x) > 0\ (+)$ оң болору, ал эми бөлүмү $x^3 > 0$ же $x > 0$ оң болсо, анда $f''(x) < 0\ (-)$ терс болору келип чыгып, иймектик томпоктук аралыктарын таблицасы төмөндөгүдөй түзүлөт.

x	$x \in]-\infty, 0[$	$x = 0$	$x \in]0, +\infty[$
$f''(x)$	$+$	жашабайт	$-$
$f(x)$	иймек	$\pm\infty$	томпок

9.9.3 Экинчи тартиптеги туундулардын жардамы менен функциянын экстремумдарын аныктоо

Функциянын экстремумга ээ болуучулугун жетиштүү шартын экинчи тартиптеги туундунун шектелген чекиттеги маанисин белгисине карап аныктоого да болот.

9.12 Теорема. *Айталы,* x_0 *чекитинде* $f(x)$ *функциясын биринчи жана экинчи тартиптеги туундулары жашап,* $f'(x_0) = 0$ *жана*

$f''(x_0) \neq 0$ *шарттары аткарылсын, анда* $f''(x_0) < 0$ *болсо* x_0 *максимум чекити, ал эми* $f''(x_0) > 0$ *болсо минимум чекити болот.*

Далилдөө: ►$f'(x_0) = 0$ болгондуктан, x_0 чекити $f(x)$ функциясын экстремумга шектелген чекит экендиги талашсыз. Айталы $f''(x_0) > 0$ болсун, анда x_0 чекитине жетишерлик жакын $\delta-$ аймакчасында жайгашкан $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ чекиттеринде $f'(x)$ функциясы монотондуу өсүүчү болушу керек. Ошондуктан аралыктын $x \in (x_0 - \delta,$ $x_0)$ биринчи жарымында $x < x_0$ болуп, $f'(x) < f'(x_0) = 0$ же

$f'(x) < 0,\ (-)$ терс белгиде, ал эми экинчи жарымында $x_0 < x$ болуп, $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ ⇨ $f'(x) > f'(x_0) = 0$ же $f'(x) > 0,\ (+)$ оң белгиде болушу келип чыгып, x_0 чекити аркылуу өткөндө $f'(x)$ туундусу белгисин $(-)$ тан $(+)$ өзгөрткөндүктөн, ал минимум чекити болору далилденет. Ушундай эле талкуулоонун жардамы менен $f''(x_0) < 0$ болгондо, x_0 чекитин максимум чекити болорун далилдей алабыз.◀

Эгерде бир учурда $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ экөөсү тең нөлгө барбар болуп калса, анда экстремум чекити 1 – 3 таблицалар боюнча изилденет.

Мисалы $y = \mathrm{e}^{x^2}$функциясын туундусун эсептеп $\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)' = 2x \cdot \mathrm{e}^{x^2}$,

$2x \cdot \mathrm{e}^{x^2} = 0$ теңдемесинен $x = 0$ шектүү чекитин табабыз. Бул чекиттеги экинчи тартиптеги $y'' = \left(2x \cdot \mathrm{e}^{x^2}\right)' = 2\mathrm{e}^{x^2} + 4x^2\, \mathrm{e}^{x^2}$ туундусунун $x = 0$ чекитиндеги мааниси $y''\,(0) = 2 > 0$ болгондуктан, 9.12 – теореманын негизинде $x = 0$ чекити минимум чекити болот $y_{\text{мин.}} = y(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.

9.9.4 Функциянын графигин тургузуу тартиби

Берилген $y = f(x)$ функциясын графигин тургузуу үчүн :

1) Анын $x \in \mathrm{X} -$ аныкталуу областын жана $y \in Y -$ өзгөрүү областын, же $f -$ эреже – мыйзамы кайсы X сандарын көптүгүн, кайсы Y сандарын көптүгүнө чагылтып жатканын аныктайбыз.

2) $f(x) -$ функциясын үзүлүү чекиттерин жана үзүлүү мүнөздөрүн (I, II – түрлөрүн, багыттарын, секиригин) аныктоо. Вертикалдык асимптоталары бар же жок экенин аныктоо.

3) Функциянын мезгилдүүлүгүн, жуп же тактыгын аныктоо.

4) Графиктин координаттык $0x$, $0y$ октору менен кесилүү чекиттерин аныктоо.

5) Функциянын чексиз алыстатылган x чекиттериндеги абалын же горизонталдык жана жантык асимптоталарын аныктоо.

6) Функциянын монотондуулук аралыктарын жана максимум, минимум чекиттерин аныктоо.

7) Функциянын томпоюу (иймейүү) багыттарын, ийилүү чекиттерин аныктоо.

8) Алынган маалыматтарга таянып функциянын графигин тургузуу.

11. Мисалдар.

а) $y = f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$ функциясын графигин тургузгула.

Тургузуу: ▶ 1) Берилген бөлчөк функциянын жашашы үчүн, анын бөлүмү $1 - x^2 \neq 0$ же $x \neq \pm 1$ болушу керек. Демек, аныкталуу областы бул эки чекиттен башка бардык чыныгы сандардын көптүгү

$X =]-\infty, -1[\cup]-1,\ 1[\cup]1, +\infty[$ болуп, өзгөрүү областы

$Y \equiv R =]-\infty, +\infty[$ бардык чыныгы сандардын көптүгү болот.

2) Функция аныкталуу областын чекиттеринде үзгүлтүксүз болуп, аныкталуу областына кирбеген $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ чекиттеринде II – түрдөгү үзүлүү чекиттерине ээ, анткени бул чекиттердеги оң жана сол жактуу пределдери чектүү болбой, чексиз

$l = |f(x_0 +) - f(x_0 -)| = \infty$ секирикке ээ. Чынында эле $x_1 = -1$ чекитинде оң жактан

$f(x_1 +) = \lim\limits_{x\to(-1)+} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = -\infty$, сол жактан

$f(x_1 -) = \lim\limits_{x\to(-1)-} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = +\infty$ пределине, ошондой эле $x_2 = 1$ чекитине да оң жактан $f(x_2 +) = \lim\limits_{x\to 1+} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = -\infty$,

сол жактан $f(x_2 -) = \lim\limits_{x\to 1-} \left[\frac{x^3}{1-x^2}\right] = +\infty$ пределдерине ээ.

Бөлчөктүн бөлүмү нөлгө айланган $x = -1$, $x = 1$ түздөрүндө, функция вертикалдык Oy огундагы $(-\infty)$ ден $(+\infty)$ ге чейинки аралыктагы маанилерди кабыл алып, бул түздөр вертикалдык асимптоталар болушат.

3) Так функция, анткени $f(-x) = \frac{(-x)^3}{1-(-x)^2} = -\frac{x^3}{1-x^2} = -f(x)$ шарты аткарылат. Демек функциянын графиги $O(0;0)$ координата башталмасына карата симметриялуу жайгашат.

Мезилсиз функция, анткени $f(x+\text{T}) = \frac{(x+\text{T})^3}{1-(x+\text{T})^2} = \frac{x^3}{1-x^2} = f(x)$ теңдештиги орун ала тургандай Т саны табылбайт. Бул теңдештик $\text{T} = 0$ болсо гана аткарылып, мезгилсиз (нөл мезгилдүү) болот.

4) Ox огу менен кесилишин табуу үчүн $y = 0$ дейбиз. Анда $\frac{x^3}{1-x^2} = 0$ келип чыгып, бөлчөк алымы нөлгө тең болгондо гана нөлгө барабар болгондуктан, $x = 0$ экенин көрөбүз. Демек, берилген функция координаттык октор менен бир гана $\text{O}(0;0)$ координаталар башталмасында кесилишет.

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^3)'}{(1-x^2)'} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3\,x^2}{-2\,x} = -\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to-\infty} x = +\infty,$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\frac{3}{2}\lim\limits_{x\to+\infty} x = -\infty$ болуп, x аргументи эки багыт боюнча тең чексиз алыстаганда, y мааниси да чексиз алыстоону улантып, $y = a$ сыяктуу горизонталдык түздөрдү бойлоп жүрбөйт же горизонталдык асимптоталарга ээ эмес. Жантык асимптота $y = kx + b$ көрүнүштөгү түздүн теңдемеси менен берилип, коэффициенттери

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3}{1-x^2} + x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x-x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-x^2} = 0$$

көрүнүштөрдө табылгандыктан, $y = -x$ түзү жантык асимптота болот.

6) Берилген функциянын туундусу

$y' = \left(\frac{x^3}{1-x^2}\right)' = \frac{3x^2\cdot(1-x^2) - x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ бөлчөгү болуп, аныкталуу областына кирген бардык $x \neq \pm 1$ чекиттеринде бөлүмү $(1-x^2)^2 > 0$ оң болгондуктан, анын нөлгө тең жана оң же терс белгиде болушу, алымын нөл болушуна жана белгисине жараша болот. Ошондуктан $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(3-x^2) = 0$ теңдештигинен

$x_1 = 0\,,\ x_2 = \sqrt{3}\,,\ x_3 = -\sqrt{3}$ зарыл шартты канааттандырган стационардык (шектүү) чекиттерин таап, алар аркылуу өткөн учурда $f'(x)$ тин белгилерин тактайбыз.

а) $x < -\sqrt{3} \Rightarrow f'(x) = x^2(3 - x^2) < 0; \quad -\sqrt{3} < x < -1 \Rightarrow$ $f'(x) = x^2(3 - x^2) > 0$ болуп, $f'(x) -$ туундусу $x_3 = -\sqrt{3}$ чекити аркылуу өткөндө белгисин $(-)$тан $(+)$ ка өзгөртөт, анда жетишерлик шарт боюнча бул чекит минимум чекити болуп, функция

$f_{\text{мин.}} = f(-\sqrt{3}) = \frac{(-\sqrt{3})^3}{1-3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ маанисине ээ болот. Функция

$]-\infty, -\sqrt{3}]$ аралыгында туундусу $f'(x) < 0$ терс болгондуктан монотондуу кемүүчү, ал эми $[-\sqrt{3}, -1[$ жарым сегментинде $f'(x) > 0$ болгондуктан монотондуу өсүүчү болот.

б) $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0; \quad 0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0$. Демек $x_1 = 0$ чекити аркылуу өткөндө туундунун белгиси өзгөрбөйт же бул чекитте функция өсүүсүн уланта берип, анын бул чекиттеги $f(0) = 0$ мааниси экстремум боло албайт.

в) $1 < x < \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) > 0; \quad x > \sqrt{3} \Rightarrow f'(x) < 0$. Демек $x_2 = \sqrt{3}$ шектүү чекити аркылуу өткөндө $f'(x) -$ туундусун белгиси $(+)$ тан $(-)$ ка өзгөрүп, $x_2 = \sqrt{3}$ чекити максимум чекити болот

$f_{\text{макс.}} = f(\sqrt{3}) = \frac{(\sqrt{3})^3}{1-3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Функция $1 < x < \sqrt{3}$ аралыгында монотондуу өсүп, $\sqrt{3} < x < +\infty$ аралыгында кемийт (I – таблицаны кара).

I – таблица x	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	кем.	мин.	өсөт	өсөт	экст. жок	өсөт	өсөт	макс.	кем.

7) Функцияны томпоктук (иймектик) аралыктарын аныктоо үчүн, анын экинчи тартиптеги туундусун $f''(x) = \frac{2x\,(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$ табабыз. Иймектикке шектүү чекиттер $f''(x) = 0$ теңдемесине чечим болгон жана экинчи тартиптеги туундулары жашабаган чекиттерден тургандыктан, алар $x_1 = 0,\ x_2 = -1\ ,\ x_3 = 1$ чекиттери болушат. Бирок $x_2 = -1\ ,\ x_3 = 1$ чекиттери аныкталуу областына кирбегендиктен, иймектикке шектүү чекит деп $x_1 = 0$ чекитин гана алып, ал аркылуу өткөндө экинчи тартиптеги $f''(x)$ туундусун белгисин тактайбыз (II – таблицаны кара).

II – таблица x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x < 1$
$f''(x)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	иймек	томпок	ийилүү чекити	иймек	томпок

8) Жогорудагы маалыматтарга таянып, функциянын графигин 9.24 – чиймесинде тургузабыз.◄

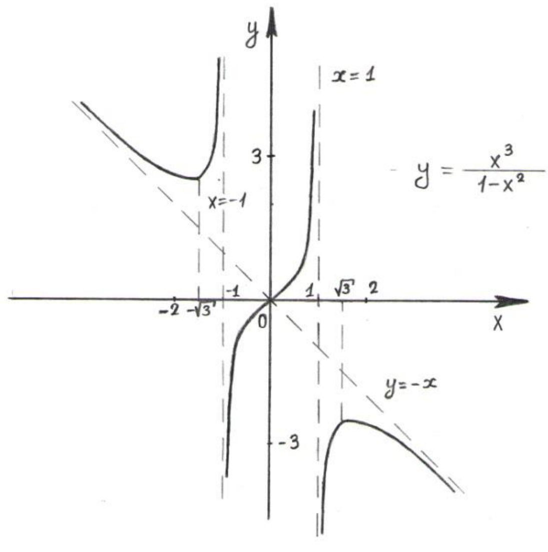
Б) $y = \frac{1}{1+x^2}$ функциясын графигин тургузгула (Марин Аньезинин иймеги).

Тургузуу: ►1. Берилген бөлчөк функциянын аныкталуу областы бүтүндөй $X \equiv R$ сан огу болот, анткени бөлчөктүн бөлүмү

$\forall x \in R:\ 1 + x^2 \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болот.

2. Функциянын үзүлүү чекиттери жана вертикалдык асимптоталары жок.

3. Мисалда берилген функция мезгилсиз, анткени $f(x+\mathrm{T})=f(x)$ шартын канааттандырган $\mathrm{T}>0$ оң саны табылбайт. Бирок жуп функция, анткени $f(-x)=\frac{1}{1+(-x)^2}=\frac{1}{1+x^2}=f(x)$ шарты аткарылат. Демек, анын графиги Оy огуна карата симметриялуу жайгашат.



9.24-чийме

4. Функциянын координаттык октор менен кесилүү чекиттерин табалы. Эгерде $x=0$ десек, анда

$y=1$ келип чыгып, Оy огун бир гана $y=1$ чекитинде кесип өтөрү белгилүү болот. Ал эми $y=0$ же $\frac{1}{1+x^2}=0$ шарты бир да x тин маанисинде аткарылбагандыктан, мисалдагы функциянын графиги $0x$ огу менен кесилишпестен, анын графиги Оx огунун жогору жагында жайгашат.

5. Функциянын чексиз алыста жайгашкан x чекиттериндеги абалын же асимптоталарын карайлы.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y= \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$ болгондуктан, $y=0$ түзү горизонталдык асимптота болот. Ал эми

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{1+x^2}-0\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$$

коэффициенттери нөлгө тең болуп, жантык асимптота менен горизонталдык асимптота дал келишет. Үзүлүү чекиттери болбогондуктан вертикалдык асимптоталары жок.

6. Функциянын монотондуулук аралыктарын жана экстремум чекиттерин аныктоо үчүн туундусун эсептесек,

$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ бөлчөк функциясы келип чыгып, $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0$ теңдемесинен $x=0$ чечимин таап, туунду жашабаган чекит жок болгондуктан аны экстремумга шектелген жалгыз чекит катары кабыл алабыз. Функциянын аныкталуу областын шектелген чекитке карата $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ интервалдарына бөлүп, бөлүнгөн интервалдагы $f'(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$ туундусун белгилерин тактайбыз. Бөлчөктүн бөлүмү ар дайыма оң болгондуктан, туундунун белгиси анын алымын белгисине жараша болуп, $x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ шыдыр өсүүчү, ал эми $x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ шыдыр кемүүчү функция болот. $x = 0$ чекитинен өткөндө $f'(x)$ туундусун белгиси $(+)$ тан $(-)$ ка өзгөрүп, функция

$f_{\text{макс.}} = f(0) = 1$ максимум маанисине ээ болот. Демек, берилген функция $\mathrm{Y} =]0,\ 1]$ аралыгында өзгөрөт.

7. Функциянын ийилүү чекиттерин жана иймектик томпоктук аралыктарын аныктоо үчүн, экинчи тартиптеги

$$f''(x) = \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)' = -\left[\frac{2\cdot\left(1+x^2\right)^2 - 2(1+x^2)\cdot 2x\cdot 2x}{(1+x^2)^4}\right] = -2\cdot\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

туундусун табабыз. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cdot\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3} = 0$ теңдемесинен $1 - 3x^2 = 0$ же $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = +\frac{\sqrt{3}}{3}$ чечимдерин таап, экинчи тартиптеги туундулары жашабаган чекиттер жок болгондуктан, табылган эки чечимдерди ийилүүгө шектүү чекиттер катарында алып, функциянын аныкталуу областын

$\mathrm{X} = \left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ интервалдарына бөлөбүз. Бөлүнгөн интервалдардагы $f''(x)$ экинчи тартиптеги туундусун белгилерин тактайбыз:

а) $x \in \left]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right[\Rightarrow 1 - 3x^2 < 0\ (-) \Leftrightarrow f''(x) > 0\ (+)$ график иймек;

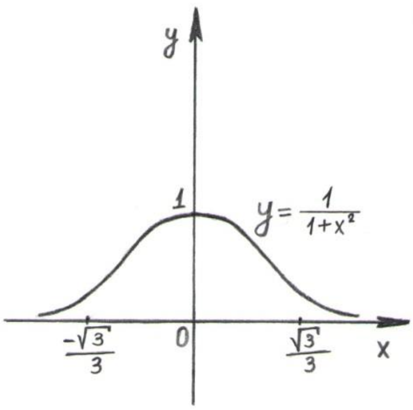
б) $x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right[\Rightarrow 1 - 3x^2 > 0\ (+) \Leftrightarrow f''(x) < 0\ (-)$ график томпок;

в) $x \in \left]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[\Rightarrow 1 - 3x^2 < 0\ (-) \Leftrightarrow f''(x) > 0\ (+)$ график иймек.

Көрүнүмдүү болсун үчүн 6, 7 – учурларды таблицага жайгаштыралы:

x	$\left]-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left]-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right[$	0	$\left]0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left]\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right[$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$
$f(x)$	өсөт	ийилүү чекити	өсөт	$f_{\text{макс.}} = 1$	кемийт	ийилүү чекити	кемийт

8. 1. – 7. де топтолгон маалыматтардын негизинде берилген функциянын графигин 9.25 – чиймесин сызабыз.◄



9.25-чийме

В) Ньютондун үч – эмек тиши деп аталган $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ функциясын графигин тургузгула.

Тургузуу: ►1) Берилген функциянын (АО) аныкталуу областына $x = 0$ санынан башка бардык R чыныгы сандары кирет, б.а $X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, анткени бул чекитте $\frac{1}{x}$ бөлчөгүнүн бөлүмү нөлгө айланат.

2) $x = 0$ чекитинде функция II – түрдөгү үзүлүүгө ээ, анткени бул чекиттеги функциянын оң жана сол жактту пределдери

$\lim\limits_{x\to 0+}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$ маанилерине ээ болушат. Ошондой эле $x = 0$ түзү вертикалдык асимптота болот.

3) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ функциясы мезгилсиз, себеби кандайдыр бир Т аралыгынан соң кайра кайталанбайт же $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ шарты аткарыла турган $\mathrm{T} > 0$ оң саны табылбайт. Ошондой эле функция жуп да, так да боло албайт, анткени

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{(-x)} = x^2 - \frac{1}{x} \neq \pm f(x).$$

4) Октор менен кесилишүү чекиттерин табуу үчүн $y = 0$ десек,

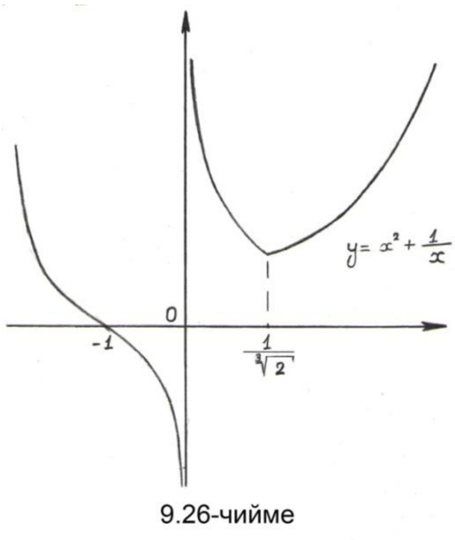
$x^2 + \frac{1}{x} = 0$ же $\frac{x^3+1}{x} = 0$ же $x^3 + 1 = 0$ теңдемесинен $x = -1$ чечимин таап, функциянын графиги Оx огун (-1; 0) чекитинде кесип өтөрүн билебиз. $x = 0$ түзү аныкталуу областына кирбей вертикалдык асимптота болгондуктан, функциянын графиги Оy огуна чексиз жакындаганы менен, аны кесип өтө албайт.

5) $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) = \pm\infty$ пределине ээ болот. Анда (9.52), (9.53) формулаларын пайдаланып $b, k -$ коэффициенттерин табуу мүмкүн эмес болгондуктан, жантык жана горизонталдык асимптоталары жок.

6) Функциянын өсүү кемүү аралыктарын жана экстремум чекиттерин аныктайлы. $f'(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$ туундусун нөлгө теңдеп, $\frac{2x^3-1}{x^2} = 0$ теңдемесинен $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ экстремумга шектелген чекитин таап, бул чекиттеги экинчи тартиптеги

$f''(x) = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right)' = 2 + \frac{2}{x^3}$ туундусун мааниси

$f''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 6 > 0\ (+)$ оң болгонуна күбө болобуз. Демек $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ минимум чекити болот. $f'(x)$ туундусу жашабаган $x_2 = 0$ чекити аныкталуу областына



9.26-чийме

кирбесе да, бул вертикалдык асимптота чекити аркылуу өткөндө туундунун белгиси өзгөрбөгөнү белгилеп өтөбүз.

$x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right[\Rightarrow f'(x) < 0 \ (-)$ шыдыр кемүүчү,

$x \in \left]\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[\Rightarrow f'(x) > 0 \ (+)$ шыдыр өсүүчү болот.

7) Функциянын иймектик томпоктук аралыктарын, ийилүү чекиттерин табалы. Экинчи тартиптеги туундусун

$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}$ нөлгө теңдеп, $x^3 + 1 = 0$ теңдемесинен $x = -1$ чечимин же ийилүү чекитине шектелген чекитти табабыз. Экинчи тартиптеги туундусу жашабаган $x_2 = 0$ чекитин эске алуу менен $f''(x)$ тин белгилерин өзгөрүү аралыктарын тактайбыз. Функциянын графигин

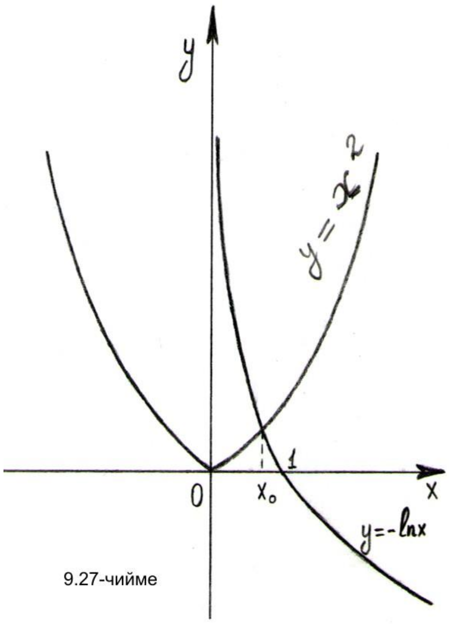
$x \in \left]-\infty, -1\right[\Rightarrow f''(x) > 0 \ (+)$ иймек ;

$x \in \left]-1, 0\right[\Rightarrow f''(x) < 0 \ (-)$ томпок;

$x \in \left]0, +\infty\right[\Rightarrow f''(x) > 0 \ (+)$ иймек абалдарда болорун жана жалгыз (-1; 0) – ийилүү чекити бар экенин билебиз.

Жогорудагы изилдөөлөрдүн натыйжасын таблицага түшүрөлү:

x	$\left]-\infty, -1\right[$	-1	$\left]-1, 0\right[$	0	$\left]0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right[$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left]\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	жаша-байт	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	жаша-байт	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	Кемийт, иймек	Ийил. чекити	Кемийт, томпок	жаша-байт, верт. асимп.	Кемийт, иймек	$f_{min.} = f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ иймек	Өсөт, иймек



9.27-чийме

8) Жыйналган маалыматтарга таянып, функциянын графигин 9.26 – чиймеде тургузабыз.◄

Г) $y = x + \frac{\ln x}{x}$ функциясын графигин тургузгула.

Тургузуу : ►1. Оң сандын гана логарифми жашагандыктан, берилген функциянын АО су X = $]0, +\infty[$ жарым огу болот.

2. Аныкталуу областын чегинде үзүлүү чекиттери жок. Бирок $x = 0$ чекитине оң жактан чексиз жакындаганда $0 < x < 1$ болуп, $\ln x < 0$ терс белгиде болгондуктан, $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ келип чыгып, аныкталуу областын сол четиндеги $x = 0$ түзү вертикалдык асимптота болорун көрөбүз.

3. Функция мезгилсиз жана жуп да, так да эмес.

4. $y = 0$ деп Ox огу менен кесилишин издейли: $x + \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+\ln x}{x} = 0$, же $x^2 + \ln x = 0$ теңдемесин чечими 0 менен 1 сандарынын арасында жайгашкан x_0 саны болорун $y = x^2$ жана $y = -\ln x$ функцияларын грфиктерин кесилишинен табабыз (9.27 – чийме). $x > 0$ болгондуктан, функциянын графиги $0y$ огу менен кесилишпейт.

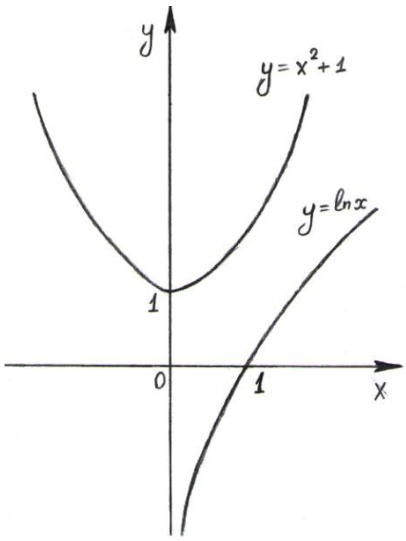
5. $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\frac{\ln x}{x}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1 \quad (x > 0),$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x + \frac{\ln x}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ келип чыгып, $y = x$ түзү жантык асимптота болот.

6. Туундусун эсептеп нөлгө теңдессек ,

$$y' = \left(x + \frac{\ln x}{x}\right)' = 1 + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' =$$

$$= 1 + \frac{(\ln x)' \cdot x - (x)' \cdot \ln x}{x^2} = 1 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2},$$



9.28-чийме

$\frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 - \ln x = 0$ теңдемесин алабыз. Бул теңдеменин чечимин да жогорудагыдай графиктик ыкмада издеп, $y = x^2 + 1$ менен $y = \ln x$ функцияларын графиктерин тургузуп, алардын кесилишпегенин көрөбүз (9.28 – чийме) . Демек стационардык чекиттери жашабайт. Аныкталуу областы боюнча $x > 0$ болуп, чиймеден көрүнгөндөй аныкталуу областын чегинде $x^2 + 1 > \ln x$ шарты аткарылып, дайыма $y' = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2}$ бөлчөгүн алымы да, бөлүмү да оң сан болгондуктан, туундусу $\forall x \in X : y' > 0\,(+)$ оң белгиде болору келип чыгат. Андай болсо, бүтүндөй X = $]0, +\infty[$ аныкталуу областын чегинде шыдыр өсүүчү функция болуп, экстремум чекиттерин жоктугуна ишенебиз.

7. Ийметик томпоктук аралыктарын, ийилүү чекиттерин табуу үчүн экинчи тартиптеги туундусун эсептеп:

$y'' = \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^3} + \frac{2\ln x}{x^3} = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ табабыз $(x > 0)$. Аны нөлгө теңдеп,

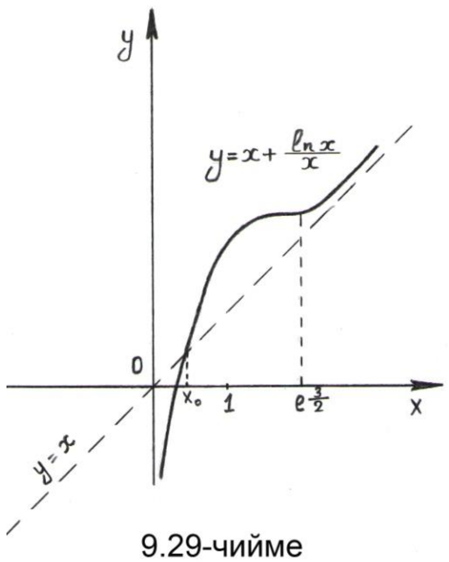
$\frac{2\ln x - 3}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 3 = 0$ теңдемесинен, $x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ – ийилүү чекитине шектелген чекитти табабыз. Бул чекит аркылуу өткөндө y'' тин белгиси $(-)$ тан $(+)$ ка өзгөрүп, $x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ ийилүү чекити болот.

Алынган маалыматтарды таблицага түшүрөлү.

x	$]0,\ x_0[$	x_0	$]x_0,\ \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}[$	$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$	$]\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, +\infty[$

$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	–	–	–	0	$+$
$f(x)$	өсөт	нөл	өсөт	Ийилүү чекити $f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \approx 4{,}8$	өсөт

8. Түзүлгөн таблицаны пайдаланып, берилген функциянын графигин 9.29 – чиймеде көрсөтөбүз.◀



9.29-чийме

д) $y = x + \frac{1}{x^2}$ функциясын графигин тургузгула.

Тургузуу: 1. Берилген функциянын аныкталуу областы $X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ аралыктары болот, анткени $\frac{1}{x^2}$ бөлчөгүнүн бөлүмү нөлдөн айырмалуу болушу керек.

2. $x = 0$ чекитинде II – түрдөгү үзүлүүгө ээ болот, анткени бул чекиттеги оң жана сол жактуу пределдери $\lim\limits_{x \to 0\pm}\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ болуп, $x = 0$ түзү вертикалдык асимптота экендигин көрөбүз.

3. Берилген функция мезгилсиз жана жуп да, так да эмес.

4. Октор менен кесилишин табалы : $y = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x^2} = 0$ теңдемесин $\frac{x^3+1}{x^2} = 0$ же $x^3 + 1 = 0$ көрүнүштө жазып,

$x = -1$ чечимин тапкан соң, график $0x$ огун $(-1; 0)$ чекитинде кесерин, $x \neq 0$ болгондуктан Оy огу менен кесилишпесин көрөбүз.

5. Асимптоталарын табалы :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+\frac{1}{x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1\,, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x+\frac{1}{x^2}}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1\,, \end{cases}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

коэффициенттерин таап, $y = x$ түзү жантык асимптота болорун көрөбүз.

6. Функциянын туундусун $y' = \left(x + \frac{1}{x^2}\right)' = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3-2}{x^3}$ таап, аны нөлгө теңдесек, $\frac{x^3-2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2 = 0$ теңдемеси келип чыгып, $x = \sqrt[3]{2}$ стационардык (турактуулук) чекити келип чыгат. Демек экстремумга шектелген $x = \sqrt[3]{2}$ чекити табылат. Экинчи тартиптеги

$y'' = \left(1 - \frac{2}{x^3}\right)' = 0 + \frac{6}{x^4} = \frac{6}{x^4}$ туундусу $\forall x \in \mathrm{X}$: $\frac{6}{x^4} > 0$ оң сан болгондуктан, берилген функция $x = \sqrt[3]{2}$ чекитинде минимумга ээ $f_{\text{мин.}} = f(\sqrt[3]{2}\,) \approx 1{,}89$.

7. Экинчи тартиптеги туундусу АО нун чегинде $y'' = \frac{6}{x^4} > 0$ оң сан болгондуктан, функциянын графиги бардык аралыкта иймек болот.

Функциянын АО сун, экстремумга жана ийилүү чекитине шектелишкен стационардык, туундулары жашабаган жана октор менен кесилишкен чекиттердин жардамы менен интервалдарга бөлүштүрүп, алардын ар бириндеги y' жана y'' туундуларын белгилерин өзгөрүүсүнө карап монотондуулук, иймектик аралыктарын жана экстремум, ийилүү чекиттерин таблица түзүп көрсөтөлү:

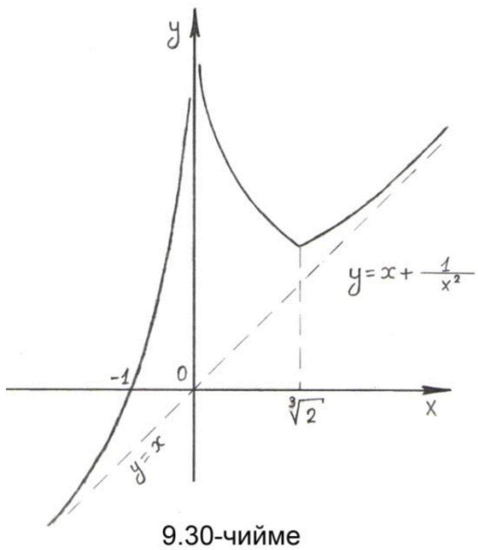
x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 0[$	0	$]0, \sqrt[3]{2}[$	$\sqrt[3]{2}$	$]\sqrt[3]{2}, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	Жаша-байт	$-$	0	$+$

$f''(x)$	+	+	+	Жаша-байт	+	+	+
$f(x)$	өсөт	0	өсөт	Жаша-байт. $x = 0$ верт. асимп.	кемийт	$f_{мин.} = = f(\sqrt[3]{2})$	өсөт

8. Топтолгон маалыматтарга таянып, функциянын графигин 9.30 – чиймеде тургузабыз.◄

Е) $y = \sqrt[3]{x \cdot (x-3)^2}$ функциясын графигин тургузгула.

Тургузуу: ►1. Каалагандай сандан кубдук тамыр чыгарууга болгондуктан, функциянын АО су X≡ $R =]-\infty, +\infty[$ аралыгы болот.



9.30-чийме

2. Үзүлүү чекиттери жана вертикалдык асимптоталары жок.

3. Мезгилсиз жана жуп да, так да эмес функция, анткени

$\exists\, T > 0$: $f(x+T) = f(x)$ жана

$f(-x) = f(x)$ теңдештиктери орун албайт.

4. $y = 0$ болгондо

$\sqrt[3]{x \cdot (x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-3)^2 = 0$ теңдемесине ээ болуп, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ чечимдерин таап, функциянын графиги Ox огу менен эки (0; 0) жана (3; 0) чекиттеринде кесилишерин көрөбүз.

5. Асимптоталарын табалы :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x\cdot(x-3)^2}}{x}\right) == \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{x\cdot(x-3)^2}{x^3}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} = 1,$$

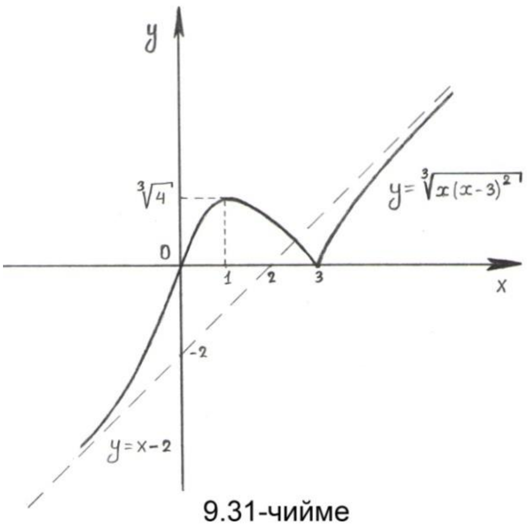
$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt[3]{x\cdot(x-3)^2} - x\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\cdot(x-3)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2\cdot(x-3)^4} + x\cdot\sqrt[3]{x\cdot(x-3)^2} + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-6x^2+9x}{x^2\cdot\left[\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x}\right)^4} + \sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2} + 1\right]} = \frac{-6}{1+1+1} = -2$$

коэффициенттерин аныктап, $y = x - 2$ түзү жантык асимптота болорун билебиз.

6. Туундусун $y' = \left(\sqrt[3]{x\cdot(x-3)^2}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(x\,(x-3)^2)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(x\,(x-3)^2)' =$

$= \frac{(x-3)^2+2x\,(x-3)}{3[x\cdot(x-3)^2]^{\frac{2}{3}}} = \frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}\,(x-3)^{\frac{1}{3}}}$ эсептеп, нөлгө теңдеген соң $\frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}\,(x-3)^{\frac{1}{3}}} = 0$ же $x - 1 = 0$ теңдемесинен $x_1 = 1$ стационардык (турактуулук) чекитин жана туундусу жашабаган $x_2 = 0,\ x_3 = 3$ чекиттеринин үчөөсүн тең экстремумга шектелген чекиттер катарында алабыз. Аныкталуу областын шектүү чекиттердин жардамы менен интервалдарга бөлүп, ар бир интервалдардагы туундунун белгилерин өзгөрүшүн байкайбыз:



9.31-чийме

$x \in]-\infty, 0[\ \Rightarrow\ y' > 0\ (+)$ өсөт,

$x \in]0, 1[\ \Rightarrow\ y' > 0\ (+)$ өсөт,

$x \in]1, 3[\ \Rightarrow y' < 0\ (-)$ кемийт,

$x \in]3, +\infty[\ \Rightarrow\ y' > 0\ (+)$ өсүп,

$x_2 = 0$ чекити аркылуу өткөндө y' тин белгиси $(+)$ оң бойдо кала берип, өсүүсүн уланта берет. $x_1 = 1$ чекити аркылуу өткөндө белгисин $(+)$ тан $(-)$ ка өзгөртүп, функция максималдык $f_{\text{макс.}} = f(1) \approx 1{,}59$ маанини алат. $x_3 = 3$ чекити аркылуу өткөндө y' тин белгиси $(-)$ тан $(+)$ ка өзгөрүп, функция минималдык $f_{\text{мин.}} = f(3) = 0$ мааниге жетет.

7. Экинчи тартиптеги туундусу

$y'' = \left(\sqrt[3]{x \cdot (x-3)^2}\right)'' = \left(\frac{x-1}{x^{\frac{2}{3}}\,(x-3)^{\frac{1}{3}}}\right)' = -\frac{2}{x^{\frac{5}{3}}\,(x-3)^{\frac{4}{3}}} \neq 0$ болгондуктан, экинчи тартиптеги туундусуна карата стационардык чекит жашабайт. Бирок экинчи тартиптеги туундулары жашабаган $x_2 = 0,\ x_3 = 3$ чекиттерин ийместикке шектелген чекиттер катарында алып, ушул чекиттер аркылуу өткөндө y'' тин белгилерин өзгөрүүсүнө саресеп салып:

$x \in \,]-\infty, 0[\ \Rightarrow\ y'' > 0\ (+)$ иймек,

$x \in \,]0, 3[\ \Rightarrow\ y'' < 0\ (-)$ томпок,

$x \in \,]3, +\infty[\ \Rightarrow\ y'' < 0\ (-)$ томпок болорун көрөбүз.

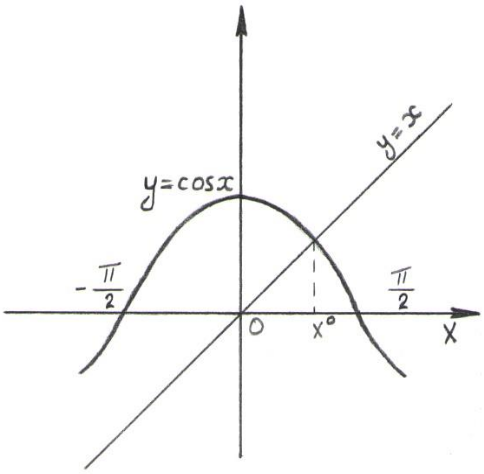
Функциянын жүрүм туруму жөнүндөгү маалыматтарды таблицага түшүрөлү:

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0, 1[$	1	$]1, 3[$	3	$]3, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	Жашабайт	$+$	0	$-$	Жашабайт	$+$
$f''(x)$	$+$	Жашабайт	$-$	$-$	$-$	Жашабайт	$-$
$f(x)$	Өсөт, иймек	(0; 0) ий.чек., $x = 0$ Вер.асимп.	Өсөт, томпок	$f_{\text{макс.}} = f(1) \approx 1{,}59$	Кемийт, томпок	$f_{\text{мин.}} = f(3) = 0$	Өсөт томпок

8. Түзүлгөн таблицаны жана табылган маалыматтарды пайдаланып, функциянын графигин 9.31 – чиймеге тургузабыз. ◄

9.9.5 Теңдемелердин жакындаштырылган чечимдерин табуу

Функциялар кайсы бир кубулуштардын математикалык моделдери катарында түзүлүп, функциялардын жүрүм турумун үйрөнүү аркылуу ошол кубулуштардын табыяты үйрөнүлгөндүктөн, туунду аппаратын таанып билүү процессиндеги орду чоң экендиги талашсыз. Анткени туунду аппараты функциянын монтондуулук, ийиектик, экстремумдары, жакындоо сызыктары (асимптоталары), жанымалары сыяктуу негизги маалыматтарды алдын ала аныктоого мүмкүнчүлүк түзөт.



9.32-чийме

Функциянын аралыктагы үзгүлтүксүздүгүнө жана тундуларын жашашына таянып, $f(x) = 0$ көрүнүштөгү теңдемелердин чечимин жакындаштырып табуу уулдары жөнүндө кыска сөз кылып кетели. Айрым учурларда теңдеменин чечимин бар экендигин билсек да, аны катасыз так – даана табуу мүмкүнчүлүгү жок болот. Бул учурда колдонуу тактыгына жараша, алардын жакындаштырылган чечимдери изделет.

1. Кысуу усулу.

Айталы $f(x) \in C[a,\ b]$ функциясы берилип, аралыктын учтарында карама – каршы белгидеги маанилерди кабыл алсын. Аныктык үчүн

$f(a) < 0,\ \ f(b) > 0$ болсун дейли, анда $]a,\ b[$ интервалын ичинен жок дегенде бир x_0 чекити табылып, $f(x_0) = 0$ теңдемесин $x = x_0$ чечими жашары Больцано – Кошинин 8.3 - теоремасынан белгилүү. Бул учурда, бар экендиги белгилүү болгон чечимди графикте көрсөтүү мүмкүн болгону менен, аны табуу бир топ убарагерчиликти жаратат. Мисалы $f(x) \equiv x - \cos x = 0$ теңдемесин $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ сегментинде сөзсүз бир чечими бар экендигин, көрсөтүлгөн аралыкта $y = \cos x$ жана $y = x$ функцияларын графиктерин сызып, алардын x_0 чекитинде кесилишинен байкайбыз (9.32 – чийме). Көрсөтүлгөн аралыктын учтарында

$f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$ карама - каршы белгидеги маанилерди кабыл алат. Мындай теңдемелерди кысуу усулу менен, талап кылынган ε- тактыгына чейин жакындаштырылган чечимин табууга болот. Ал үчүн $[a,\ b]$ сегментин тең экиге бөлөбүз. Эки учурдун болушу мүмкүн:

1) Бөлүнгөн аралыктардын тең ортосундагы $x_0 = a_1 = \frac{a+b}{2}$ чекитинде $f(x_0) = 0$ орун алып теңдеменин $x_0 = a_1$ чечими табылса, чечим издөө процесси токтотулат;

2) Эгерде $f(a_1) \neq 0$ болсо, анда бөлүнгөн аралыктардын биринин учтарында $f(x)$ карама - каршы белгидеги маанилерди кабыл алат. Ошол аралыкты $[a_1,\ b_1]$ сегменти деп алып, аныктык үчүн $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ болсун дейли.

Жаңыдан түзүлгөн $[a_1,\ b_1]$ сегментин да тең экиге бөлүп, анын тең ортосундагы $x_0 = a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ чекитинде $f(x_0) = 0$ болсо, анда $f(x) = 0$ теңдемесин чечими $x_0 = a_2$ болуп, чечимди издөө токтотулат. Эгерде $f(a_2) \neq 0$ болсо, анда аралыктын учтарында $f(x)$ карама - каршы белгидеги маанилерге ээ болгон бөлүктү $[a_2,\ b_2]$ жана $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$ деп түшүнөбүз. Келип чыккан $[a_2,\ b_2]$ сегментин дагы тең экиге бөлүп, келип чыккан бөлүкчөлөрдө жогорудагы эки учурду текшеребиз. Эгерде теңдеменин чечими табылбаса, мындай экиге тең бөлүү процессин уланта беребиз. Натыйжада $n-$ жолу тең экиге бөлүнгөн бири - бирине кийиштирилген

$[a,\ b]$, $[a_1,\ b_1]$, $[a_2,\ b_2]$, … ,$[a_n,\ b_n]$ сегменттердин системасы түзүлөт. Акыркы сегменттин узундугу жетишерлик кичине $\frac{b-a}{2^n}$ санына барабар болуп, бөлүүлөрдүн n санын жетишерлик чоң тандоо менен, керектүү ε тактыкка жетишүү үчүн, $\varepsilon < \frac{b-a}{2^n}$ барбарсыздыгынан n санын $n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)$ боло тургандай тандоо керек экендигин көрөбүз. Демек $\frac{b-a}{2^n}-$ санынан ашпаган катачылык менен, $f(x) = 0$ теңдемесин жакындаштырылган чечими деп $x_0 \approx a_n$ же $x_0 \approx b_n$ сандарынын бирөөсүн алууга болот.

2. Хордалар жана жанымалар усулдары.

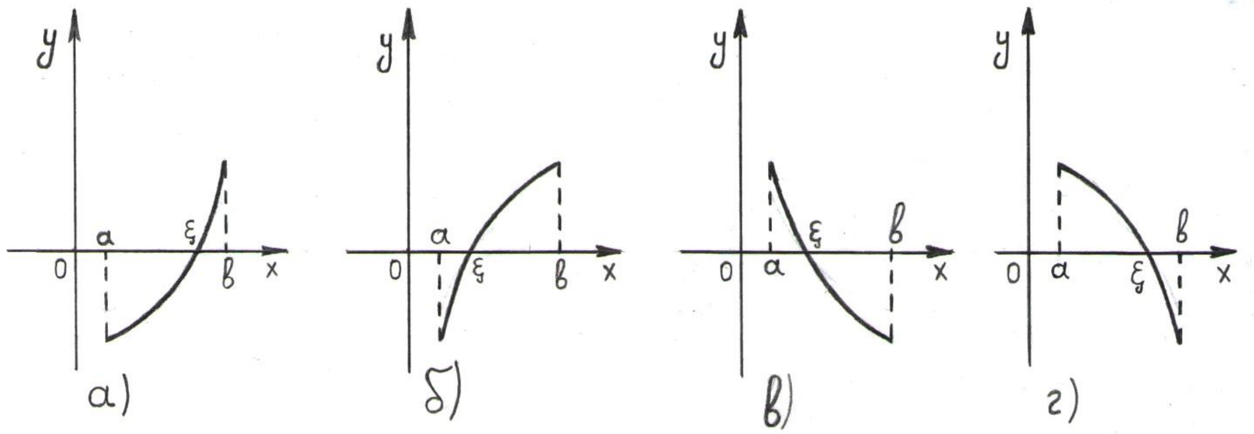
$f(x) \in C^2[a,\ b]$ мейкиндининдеги функция болгон учурда, $f(x) = 0$ теңдемесинин жакындаштырылган (берилген ε тактыкта) чечимин табалы. Ал үчүн $f(x)$ функциясына төмөндөгүдөй шарттарды коёбуз:

1. $f(x) \in C^2[a,\ b]$ **;**

2. Аралыктын учтарында $f(x)$ карма - каршы белгидеги маанилерге ээ, б.а. $f(a) > 0 \cdot f(b) < 0$**;**

3. Берилген аралыкта $f'(x)$, $f''(x)$ туундуларын белгилери турактуу сакталат.

Коюлган шарттардын чегинде үзгүлтүксүз функциялардын



9.33-чийме

аралыктагы маанилери жөнүндөгү Больцано – Кошинин 8.3 – теоремасы аткарылып, $]a,\ b[$ интервалынан жок дегенде бир ξ чекити табылып, $f(\xi) = 0$ теңдештиги аткарылат. Коюлган үчүнчү шарт боюнча бул аралыкта туундулардын белгилери өзгөрүлбөгөндүктөн, $f(x)$ аралыктын бардык чекиттеринде өсүүчү же кемүүчү (токтолбос) бойдон кала берип, ξ чекитинен башка $f(\xi) = 0$ шартын канааттандырган чекит табылбайт. Демек теориялык жактан жогорудагы теңдеменин $]a,\ b[$ интервалында бир гана $x = \xi$ чечимин жашашына толук кепилдик берилет.

Практикалык жактан ал чечимди талап кылынган $\varepsilon -$ тактыкта табууга аракеттенели. Ал үчүн $f'(x)$, $f''(x)$ туундуларынын белгилерин $[a,\ b]$ аралыгында турактуу сакталуу мүмкүнчүлүктөрүнө токтолобуз (9.33 – а, б, в, г – чиймелер) :

1) $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0 -$ шыдыр өсүүчү, иймек (а - чийме);

2) $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0 -$ шыдыр өсүүчү, томпок (б – чийме);

3) $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0 -$ шыдыр кемүүчү, иймек (в – чийме);

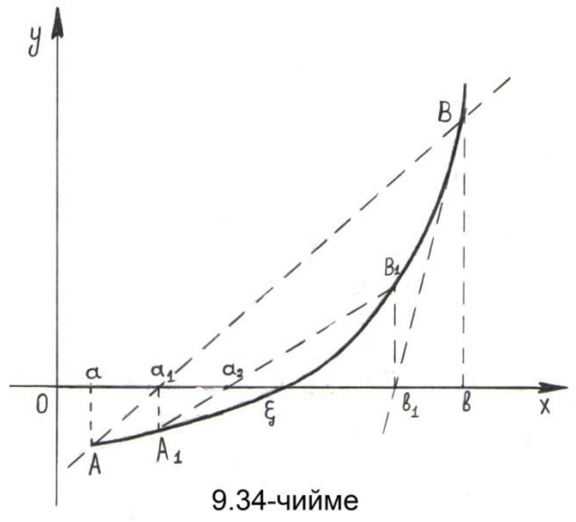
4) $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0 -$ шыдыр кемүүчү, томпок (г – чийме) .

Аныктык үчүн $[a,\ b]$ сегментинде $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ болгон 1) – учурду карайлы (9.34 – чийме) .

$\mathfrak{f}(x)$ функциясын графигинин учку $\mathrm{A}(a;\ \mathfrak{f}(a))$, $\mathrm{B}(b;\ \mathfrak{f}(b))$ чекиттерин AB хордасы менен туташтырсак, эки чекит аркылуу өтүүчү түздүн теңдемеси катарында хорда

$$\frac{y-\mathfrak{f}(a)}{\mathfrak{f}(b)-\mathfrak{f}(a)} = \frac{x-a}{b-a} \qquad (9.54)$$

теңдемеси менен сүрөттөлөт. Мындан $y = 0$ деп, хорданын $0x$ огу менен кесилишүүчү



9.34-чийме

$a_1 = a - \frac{\mathfrak{f}(a)(b-a)}{\mathfrak{f}(b)-\mathfrak{f}(a)}$ чекитин табабыз. Бул a_1 кесилишүү чекити, a чекитине салыштырмалуу $x = \xi$ чечим болуучу чекитине жакындап, каралган аралыкта дайыма ξ чекитинен $\mathfrak{f}(x)$ менен $f''(x)$ тин белгилери карама – каршы боло тургандай тарапта жайгашарын байкайбыз.

Экинчи тараптан, $\mathrm{B}(b;\ \mathfrak{f}(b))$ чекитинен $\mathfrak{f}(x)$ функциясын графиги болгон $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ жаасына жаныма BB_1 түзүн жүргүзөлү. a_1 чекити жайгашкан биринчи тарапта $\mathfrak{f}(x)$ менен $f''(x)$ тин белгилери карама - каршы болсо, экинчи тарапта $\mathfrak{f}(x)$ менен $f''(x)$ тин белгилери окшош болушу негизги шарттардын бири болуп эсептелет. Анткени бул шарт сакталбаса жаныманын $0x$ огу менен кесилишүүчү b_1чекити, чечим болуучу ξ чекитине жакындабай, андан алыстап b чекитине жакындап барышы мүмкүн. Тескерисинче экинчи тарапта да, экөөсү эки башка белгиде $\mathfrak{f}(x) > 0$ жана $f''(x) < 0$ сыяктуу болуп калса, анда томпок функцияга $\mathrm{B}(b;\ \mathfrak{f}(b))$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма, b чекитинин сыртында жок эле дегенде ага жакын чекитте гана $0x$ огун кесип өткөн болор эле. Каралган учурда, экинчи тарапта

$\mathrm{f}(x) > 0$, $f''(x) > 0$ экөөсү тең оң белгиде деп алып, b_1 чекити, b чекитине салыштырмалуу ξ чекитине жакындап, b менен ξ нин арасында жайгашканына ишенебиз. Жүргүзүлгөн жаныманын теңдемеси

$$y - \mathrm{f}(b) = f'(b) \cdot (b - a) \qquad (9.55)$$

көрүнүштө болорун эске түшүрүп $y = 0$ десек, жаныманын $0x$ огу менен кесилишүү $b_1 = b - \frac{\mathrm{f}(b)}{f'(b)}$ $(f'(b) \neq 0)$ чекитин табабыз. Ошентип $x = \xi$ чечимине, $\varepsilon_1 = |b_1 - a_1|$ каталыгы менен жакындоонун биринчи кадамында жаңыдан түзүлгөн $[a_1,\ b_1]$ сегментине ээ болобуз

$(a < a_1 < \xi < b_1 < b)$.

Экинчи кадамда $A_1(a_1; f(a_1))$ чекити менен $B_1(b_1; f(b_1))$ чекитин туташтырган хорда жүргүзүп, $[a_1,\ b_1]$ сегментинде жогорудагы усулду кайталасак, $x = \xi$ чечимине $\varepsilon_2 = |b_2 - a_2|$ каталыгы менен жакындоочу

$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1) \cdot (b_1 - a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$, $\quad b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$ $\quad (f'(b_1) \neq 0)$ сандарын табабыз. Ушундай эле ыкмада үчүнчү, төртүнчү ж.б.у.с., $n -$ кадамдарды жасоо менен $x = \xi$ чечимине улам жакындоочу сандардын тизмегине

$a < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \xi$,

$b > b_1 > b_2 > b_3 > \cdots > b_n > \xi$ ээ болобуз. n кадамдарын жүрүшүн улам кичинерип бара жаткан $|b_n - a_n|$ айырма, талап кылынган $\varepsilon -$ тактыгына теңдешкенге чейин уланта беребиз ($\varepsilon = |b_n - a_n|$). Мында

$$a_0 = a\,,\ \ a_n = a_{n-1} = \frac{f(a_{n-1}) \cdot (b_{n-1} - a_{n-1})}{f(b_{n-1}) - f(a_{n-1})}\,,\ n = 1,\ 2,\ 3, \ldots\ ; \qquad (9.56)$$

$$b_0 = b,\ \ b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})},\ (\ f'(b_{n-1}) \neq 0\ ), n = 1,\ 2,\ 3, \ldots \qquad (9.57)$$

көрүнүштөрдө табылышат.

Иш жүзүндө $\{a_n\}$ монотондуу өсүүчү удаалаштык болуп, жогору жагынан ξ саны менен чектелсе, $\{b_n\}$ монотондуу кемип, төмөн жагынан ξ саны менен чектелип турат. Андай болсо, монотондуу жана чектелген удаалаштыктардын предели жөнүндөгү теорема боюнча, алар $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \xi$ жана $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta = \xi$ чектүү пределдерине ээ болушуп, жогорудагы үч (1. , 2. , 3.) шарттар аткарылган кезде, берилген аралыкта $f(x) = 0$ теңдемесин жалгыз гана $\xi = \alpha = \beta$ чечимин жашары практикалык жактан көрсөтүлгөн болот.

Сөз кылынган усулдар менен функциялар катышкан теңдемелерди чыгаруу, көптөгөн машакаттуу эсептөөлөрдү талап кылганы менен, эсептөө алгоритмдерин түзүп, теңдемелердин чечимдерин компьютердик технологияларды колдонуп табууга мүмкүнчүлүк жаратат.

Көнүгүүлөр

9.1 Туундуларын тапкыла :

1) $y = x^3 - 2x^{\frac{1}{2}} + 5x + 7$; 2) $y = (x^2 - 3x + 3) \cdot (x^3 - 1)$;

3) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$; 4) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

5) $y = (x^3 + 1)\left(5 - \frac{1}{x^2}\right)$, $y'(1)$ маанисин тапкыла.

Жооптору: 1) $y' = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 5$; 2) $y' = 5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x + 3$;

3) $y' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; 4) $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$; 5) $y'(1) = 16$.

9.2 Татаал функциялардын туундуларын тапкыла :

1) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$; 2) $y = \sin x^2 - \cos x$; 3) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$; 4) $y = sin^2 x$;

5) $y = \frac{1}{3} tg^3 x - tg\, x + x$; 6) $y = 2\sin(3x - 1)$; 7) $y = \sin\frac{1}{x}$;

8) $y = sin^5 2x$; 9) $y = \sin(\sin x)$; 10) $y = x\, arc\sin x$;

11) $y = x \sin x \cdot arctg\, x$; 12) $y = arcsin\, \frac{2}{x}$; 13) $y = arctg\, x^2$;

14) $y = \ln^2 x$; 15) $y = x^2 \log_3 x$; 16) $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$; 17) $y = \ln tg\, x$;

18) $y = 9^{\,x}$; 19) $y = \frac{x^3+2^x}{x}$; 20) $y = 10^{3x+1}$; 21) $y = 5^{\sin x}$;

22) $y = \sin(\,3^x)$; 23) $y = sh^3 x$; 24) $y = \sqrt{ch\,x}$; 25) $y = th(\ln x)$;

26) $y = 3^{sh^2 x}$; 27) $y = x^{\sin x}$; 28) $y = x^{\ln x}$;

29) $y = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^3}$; 30) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

31) $y = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos x}{sin^2 x}$; 32) $y = 3x^3 arc\sin x + (x^2+2)\cdot\sqrt{1-x^2}$;

33) $y = x\,(arc\sin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\cdot arc\sin x$.

Жооптору: 1) $y' = -\frac{2x}{3(1+x^2)^{\frac{4}{3}}}$; 2) $y' = 2x\,\cos x^2 + \sin x$;

3) $y' = \frac{1}{1+\cos x}$;

4) $y' = \sin 2x$; 5) $y' = tg^4 x$; 6) $y' = 6\,\cos(3x-1)$; 7) $y' = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$;

8) $y' = 10\,sin^4 2x\,\cos 2x$; 9) $y' = \cos(\sin x)\,\cos x$;

10) $y' = arc\sin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $y' = \sin x\;\; arctg\, x + x\,\cos x\;\; arctg\, x +$

$+\frac{x\,\sin x}{1+x^2}$; 12) $y' = -\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$; 13) $y' = \frac{2x}{1+x^4}$; 14) $y' = \frac{2}{x}\ln x$;

15) $y' = 2x\log_3 x + \frac{x}{\ln 3}$; 16) $y' = \frac{1+x^2\,-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$; 17) $y' = \frac{2}{\sin 2x}$;

18) $y' = 9^x\ln x$; 19) $y' = \frac{2^x(x\,\ln 2-1)+2x^3}{x^2}$; 20) $y' = 3\cdot 10^{3x+1}\ln 10$;

21) $y' = 5^{\sin x}\cos x\,\ln 5$; 22) $y' = 3^x\cos 3x\,\ln 3$; 23) $y' = 3\,sh^2 x\,ch\,x$;

24) $y' = \frac{sh\,x}{2\sqrt{ch\,x}}$; 25) $y' = \frac{1}{x\,ch^2(\ln x)}$; 26) $y' = 3^{sh^2 x}\,sh\,2x\,\ln 3$;

27) $y' = x^{\sin x}\left(\cos\ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$; 28) $y' = 2\,x^{\ln x-1}\cdot\ln x$;

29) $y' = \frac{2\,(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^2}}$; 30) $y' = \sqrt{x^2-a^2}$; 31)$y' = \frac{1}{sin^3 x}$;

32) $y' = 9x^2\,arc\sin x$; 33) $y' = (arc\sin x)^2$.

9.3 Төмөндөгү функциялардын x чекитиндеги дифференциалдарын тапкыла:

1) $y=\frac{1}{4x^4}$; 2) $y=tg^{\,2}x$; 3) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$; 4) $y=arc\sin\frac{x}{a}$;

5) $y=x\,e^{2x}$; 6) $y=5^{\ln\sin x}$. Жооптору: 1) $dy=-\frac{dx}{x^5}$; 2) $dy=\frac{2\mathrm{tg}\,x}{cos^2x}dx$; 3) $dy=\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$;

4) $dy=\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(-a<x<a)$; 5) $dy=(1+2x)\,e^{2x}dx$;

6) $dy=5^{\ln\sin x}\,ctg\,x\;\ln 5\;\mathrm{d}x$.

9.4 $dy|_{x=0}$, $dy|_{x=1}$ дифференциалдарын эсептегиле :

1) $y=\sin\frac{\pi x}{2}$; 2) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$. Жооптору: 1) $dy|_{x=0}=\frac{\pi}{2}\,dx$, $dy|_{x=1}=0$; 2) $dy|_{x=0}=dx$, $dy|_{x=1}=dx$.

9.5 Жакындаштырып эептегиле :

1) $\cos 151^0$; 2) arcsin 0,49 ; 3) $\lg 11$; 4) $\sqrt[3]{1{,}01}$; 5) $e^{0{,}2}$; 6) $\sqrt[7]{130}$.

Жооптору: 1) 0,8747 ; 2) 0,5121рад. же $29^0 20'$; 3)1,04; 4) 1,0033 ;

5) 1,2 ; 6) 2,0045 .

9.6 Көрсөтүлгөн тартиптеги туундуларын тапкыла:

1) $\left(e^{-x^2}\right)'''$; 2) $(x^5\ln x)'''$

Жооптору: 1) $(12x-8x^3)e^{-x^2}$; 2) $x^2(60\,\ln x+47)$;

9.7 Көрсөтүлгөн тартиптеги дифференциалдарын тапкыла :

1) $d^3(x^3)$; 2) $d^4\left(\sqrt{x-1}\right)$; 3) $d^5(x\,\ln x)$; 4) $d^{10}(x\sin x)$.

Жооптору : 1) 6 dx^3; 2) $-\frac{15\,dx^4}{16(x-1)^{\frac{7}{2}}}$, $(x>1)$; 3) $-\frac{6\,dx^5}{x^4}$, $(x>0)$;

4) $(10\cos x-x\sin x)dx^{10}$.

9.8 Параметрдик теңдемеси менен берилген функциялардын $\frac{dy}{dx}$ туундуларын тапкыла:

1) $\begin{cases} x = 2t - 1\,, \\ y = t^3\,. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = a\,cos^3 t\,, \\ y = b\,sin^3 t\,. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}\,. \end{cases}$

Жооптору: 1) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\,t^2$; 2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,t$; 3) $\frac{dy}{dx} = -2\,e^{3t}$.

9.9 Экинчи тартиптеги $\frac{d^2y}{dx^2}$ туундуларын тапкыла:

1) $\begin{cases} x = \ln t\,, \\ y = t^3\,. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = e^t \cos t\,, \\ y = e^t \sin t\,. \end{cases}$

Жооптору: 1) $\frac{d^2y}{dx^2} = 9\,t^3$, 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2e^{-t}}{(\cos t + \sin t)^3}$.

9.9 Функцияларга толук изилдөө жүргүзүп, графиктерин тургузгула :

1) $y = 1 + x^2 - 0{,}5x^4$; 2) $y = (x+1)(x-2)^2$; 3) $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$;4) $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$; 5) $y = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$; 6) $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$; 7) $y = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

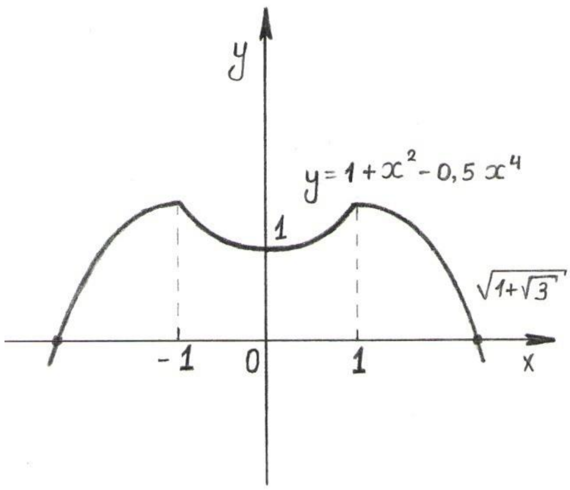
8) $y = \sin(\arcsin x)$; 9) $y = a\mathrm{rctg}\,(\mathrm{tg}\,x)$; 10) $y = \arcsin(\sin x)$;

11) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$; 12) $y^2 = 8\,x^2 - x^4$.

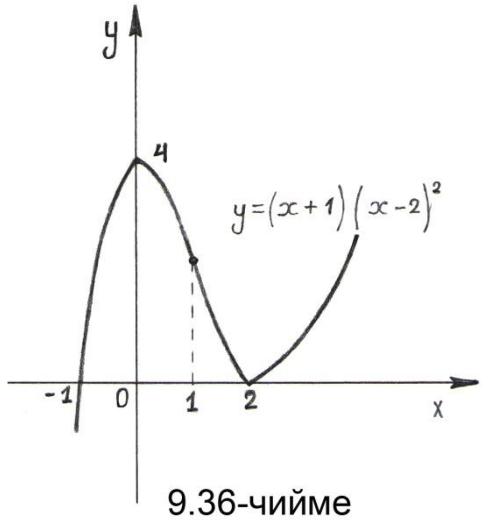
Жооптору: 1) 9.35 – чийме ; 2) 9.36 – чийме ; 3) 9.37 – чийме ;

4) 9.38 – чийме ; 5) 9.39 – чийме ; 6) 9.40– чийме ; 7) 9.41 – чийме ;8) 9.42 – чийме ; 9) 9.43 – чийме ; 10) 9.44 – чийме ; 11) 9.45 – чийме ;

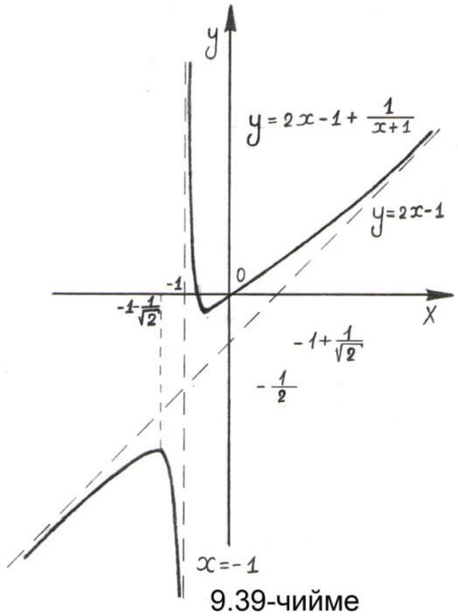
12) 9.46 – чийме .



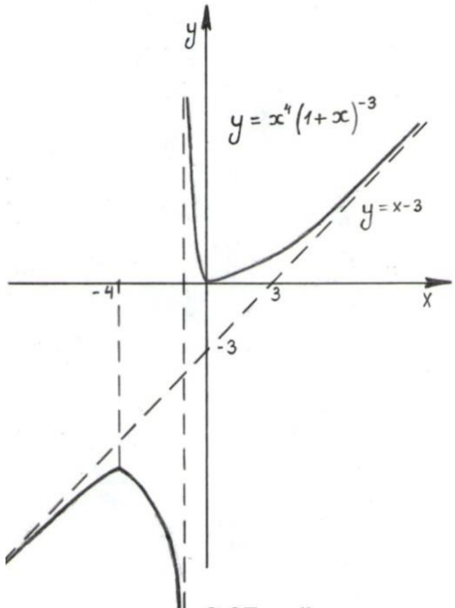
9.35-чийме



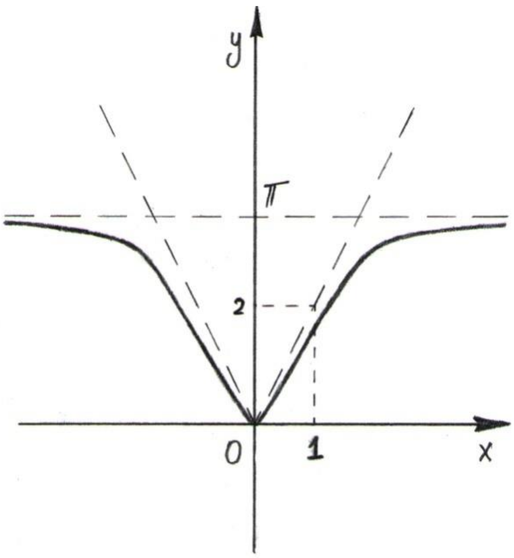
9.36-чийме



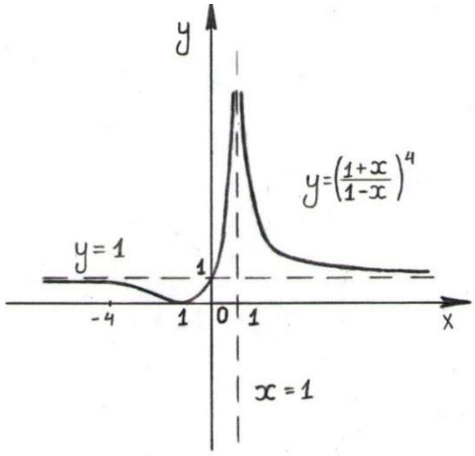
9.39-чийме



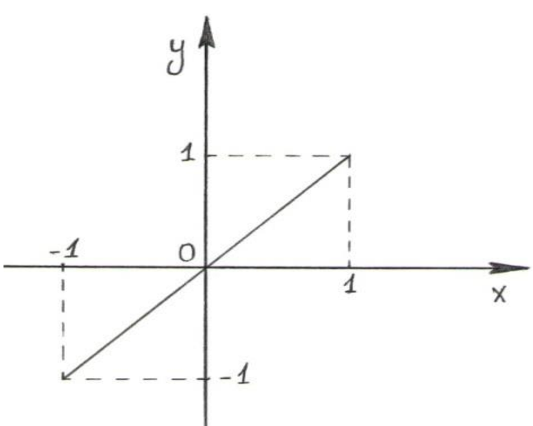
9.37-чийме



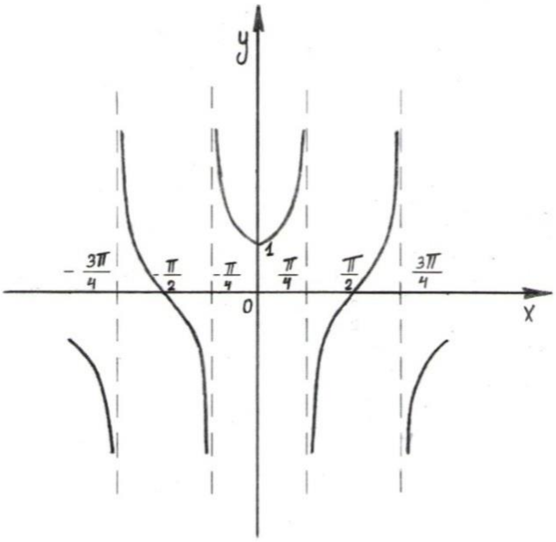
9.41-чийме



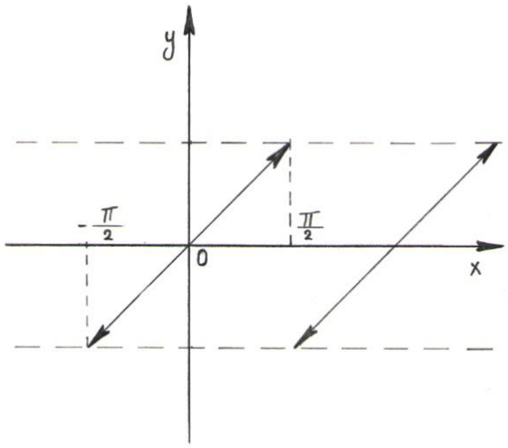
9.38-чийме



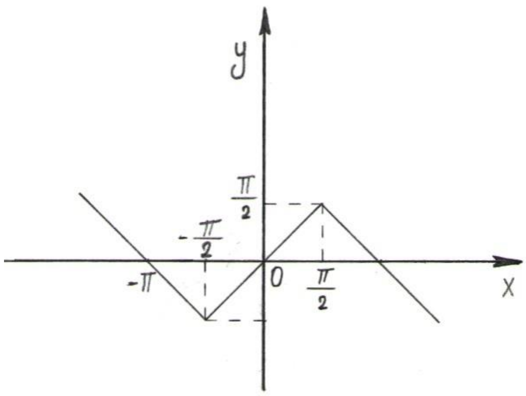
9.42-чийме



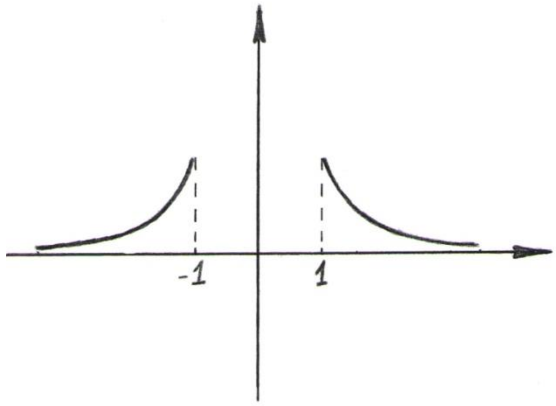
9.40-чийме



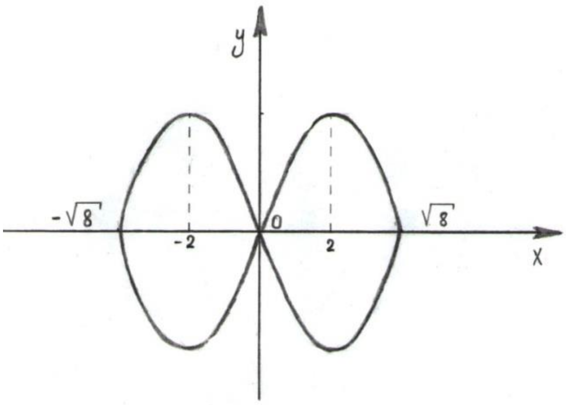
9.43-чийме



9.44-чийме



9.45-чийме



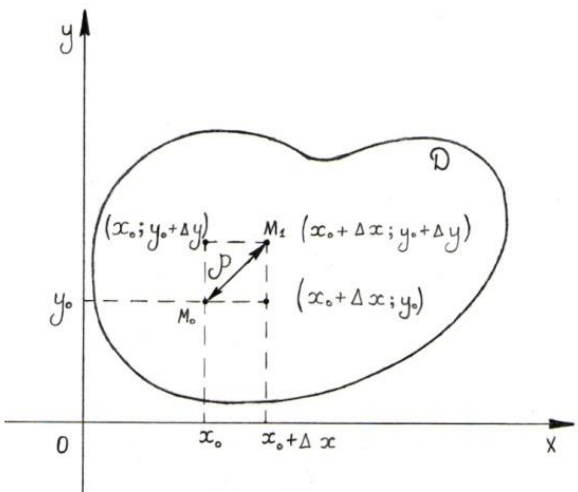
9.46-чийме

X ГЛАВА. КӨП ӨЗГӨРҮЛМӨЛҮҮ ФУНКЦИЯЛАРДЫДИФФЕРЕНЦИРЛӨӨ

§10.1 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын туундулары

10.1.1 Жекече туундулар

Айталы $u = f(x, y)$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы xOy координаттык тегиздигиндеги кандайдыр бир D ачык областында аныкталган жана үзгүлтүксүз функция болсун. Бул областтан каалагандай $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ координаталуу бир фиксирленген (кыймылы токтотулган) чекитти алып, ага $x_0 + \Delta x$ *жана* $y_0 + \Delta y$ өсүндүсүн берген кезде ордунан козголгону менен, D областынан чыгып кете албайт деген шарт коёлу (10.1– чийме). Функциянын туундусу кош предел менен байланышкандыктан, аны кайталануучу предел катарында эсептөөгө мүмкүнчүлүк берген шарттар орун алсын дейли. Берилген эки өзгөрүлмөлүү функциянын y_0 өзгөрүлмөсүн фиксирленген абалда калтырып, x өзгөрүлмөсү боюнча туундусун эсептейли. Берилген функция, M_0 чекитинде эки өзгөрүлмөсү боюнча тең үзгүлтүксүз болгондуктан, анын x аргументи $x_0 + \Delta x$ өсүндүсүн алып $y = y_0$ түзү боюнча $\mathrm{O}x$ огуна параллель козголгондо (термелгенде), функция да кошо козголуп тиешелүү



10.1-чийме

$\Delta_{x_0} u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ өсүндүсүнө ээ болот. Анда туундунун 9.1 – аныктамасын, эки өзгөрүлмөлүү функциянын x өзгөрүлмөсү боюнча туундусуна төмөндөгүдөй көрүнүштө жалпылоого болот:

10.1 Аныктама. *Эгерде*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_{x_0} u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f'_x(x_0, y_0) \qquad (10.1)$$

предели жашаса, анда анын маанисин $u = f(x,y)$ функциясынан x өзгөрүлмөсү боюнча M_0 чекитинде алынган жекече туунду деп атап, $u'_x|_{x=x_0}$, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=x_0}$, $f'_x(x_0,y_0)$ көрүнүштөрдө белгилейбиз.

$\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитин фиксирлебей кыймылга келтирип $\mathrm{M}(x;y)$ деп белгилесек, анда x өзгөрүлмөсү боюнча жекече туундуларды u'_x , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $f'_x(x,y)$ көрүнүштөрдө жазууга болот. Ошентип жалпы учурда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x} \qquad (10.2)$$

теңдештиги орун алат. Ушундай эле талкууну y өзгөрүлмөсү боюнча жүргүзүп, ал боюнча жекече туундуну

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

табабыз жана u'_y , $\frac{\partial u}{\partial y}$, $f'_y(x,y)$ деп белгилейбиз.

$u = f(x,y)$ функциясын берилген $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинде чектүү жекече туундулары жашаса, анда аны ушул чекиттин жакынкы чеке белинде сызыктуу функция менен алмаштыруу мүмкүнчүлүгү пайда болот. Мисалы чектүү $f'_x(x_0,y_0)$ жекече туундусу жашаса, анда предел алдындагы функция, өзүнүн пределдик маанисинен чексиз кичине чоңдукка гана айырмалангандыктан, (10.1) теңдештигинен

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (10.3)$$

келип чыгып, η ∈ $(x_0,\ x_0+\Delta x)$ аралыгындагы η өзгөрүлмөсүнө карата

$f(\eta,y_0) = \varphi(\eta)$ белгилөөсүн киргизип, $\Delta x = \eta - x_0$ өсүндүсү x_0 чекити менен η нын аралыгы болорун эске алып,

$\varphi(\eta) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(\eta - x_0) + o(\Delta x)$ функциясына ээ болобуз. Мындан жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүгүн таштап жиберип,

$\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитин чексиз жакынкы чеке белинде $f(x,y)$ ке эквиваленттүү $f(x,y) \sim \varphi(\eta)$ болгон сызыктуу $\varphi(\eta) = B + A(\eta - x_0)$ көрүнүштөгү сызыктуу функцияны түзүүгө болорун көрөбүз

(B = $f(x_0, y_0)$, $A = f_x'(x_0, y_0)$ турактуу сандар).

Жалпы n өзгөрүлмөлүү $u = f(x)$ функциясы $x \in D \subseteq R^n$ болгондуктан, аргументи $x = \{x_1;\ x_2;\ ...;\ x_n\}$ координаталарына ээ болуп, $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ көрүнүштө жазылат. Анын ар бир x_i өзгөрүлмөлөрү $(1 \leq i \leq n)$ боюнча жекече туундулары (10.2) сыяктуу эсептелип, x_i гана фиксирленеген өзгөрүлмө, ал эми башка бардык өзгөрүлмөлөр турактуу сан катары катышышат:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_n)}{\Delta x_i}.$$

Демек жекче туундулар бир эле өзгөрүлмө боюнча алынып, калгандары турактуу сан катары катышкандыктан, бир өзгөрүлмөлүү функциянын туундуларына окшош эсептелип, негизги элементардык функциялардан туунду алуу таблицаларын колдоно беребиз.

Мисалы 1) $u = \sin(xyz)$ функциясын жекече туундулары

$\frac{\partial u}{\partial x} = (y \cdot z)\cos(xyz)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = (x \cdot z)\cos(xyz)$, $\frac{\partial u}{\partial z} = (y \cdot z)\cos(xyz)$ болот.

2) $z = e^{xy}$ функциясын жекече туундулары $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$ көрүнүштө табылат.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялар берилген чекитте үзгүлтүксүз болсо гана, ошол чекиттеги жекече туундуларын эсептөөгө киришебиз. Бирок, айрым учурларда үзүлүү чекиттеринде да жекече туундуларды эсептөө мүмкүнчүлүгү болуп калышы мүмкүн. Мисалы

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \textit{эгерде}\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \textit{эгерде}\quad x = y = 0 \end{cases}$$ функциясы O(0; 0) чекитинде

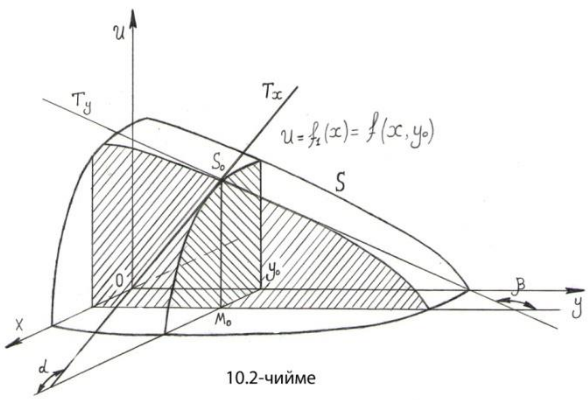
үзүлүүгө ээ экендигин, $O(0; 0)$ чекитине $y = x$ түзүндөгү чекиттер аркылуу жакындап келип, функциянын $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \frac{1}{2}$ пределин

мааниси менен, O(0;0) чекитиндеги $f(0,0) = 0$ мааниси экөөсүнүн барабар эмес экендигинен билебиз. Бирок ошого карабастан O(0;0) чекитинде жекече туундулары жашайт $\frac{\partial f}{\partial x}|_{O(0;0)} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{O(0;0)} = 0$, анткени $y_0 = 0$, $x_0 = 0$ маанилерин (10.1) пределин алдындагы тиешелүү туюнтмаларга койсок, функция нөл болгондуктан тиешелүү өсүндүлөр пределге өткөнгө чейин эле $\Delta_x f = 0$, $\Delta_y f = 0$ нөлгө айланышып, тиешелүү жекече туундулардын да нөл болору келип чыгат.

10.1.2 Жекече туундулардын геометриялык жана механикалык түшүндүрмөлөрү

∘Айталы, эки өлчөмдүү R^2 мейкиндигиндеги D областында аныкталган жана үзгүлтүксүз $u = f(x, y)$ функциясы берилип, анын x, y өзгөрүлмөлөрү боюнча жекече туундулары жашасын ($(x, y) \in D \subseteq R^2$). Ал эми үч өлчөмдүү мейкиндиктеги S бети анын графиги болсун. D областынан алынган $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги функциянын жекече туундуларына геометриялык жактан түшүндүрмө берели. Бул чекиттеги функциянын мааанисин $u_0 = f(x_0, y_0)$ десек, анда функциянын графиги болгон S бетинде $\mathrm{S}_0(x_0; y_0; u_0) = \mathrm{S}_0(x_0; y_0;\ f(x_0, y_0))$ координаталуу чекит жайгашкан болот.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ жекече туундусун алууда, $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитин жакынкы чеке белинде экинчи $y = y_0$ өзгөрүлмө турактуу сан катары эсептелгендиктен, берилген функцияны $u = f(x, y_0) = f_1(x)$ сыяктуу бир өзгөрүлмөлүү функция катары эсептөөгө болот. $f_1(x)$ тин графиги S бетин $y = y_0$ тегиздиги менен кескенде келип чыккан кесилиш ийриси болот (10.2– чийме). Бир өзгөрүлмөлүү$f_1(x)$ функциясын x_0чекитиндеги туундусу, геометриялык жактан анын графигине S_0 чекитинен жүргүзүлгөн T_x жаныма түзүнүн k_{T_x} бурчтук коэффициентине барабар болгондуктан,



10.2-чийме

$$k_{T_x} = \mathrm{tg}\alpha = f_1'(x_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{\mathrm{M}_0(x_0; y_0)} \qquad (10.4)$$

теңдештигине ээ болобуз. Бул жерде α – бурчу Оx огу же ал жаткан тегиздик менен T_x жаныма түздүн арасындагы бурч.

Ушундай эле талкуулоону жүргүзүп,

$k_{T_y} = \mathrm{tg}\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)|_{\mathrm{M}_0(x_0;y_0)}$ болорун көрөбүз.

Ошентип эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x, y)$ функциясын $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги жекече туундулары, геометриялык жактан туунду алынып жаткан өзгөрүлмөнүн багытына карай, анын графигинде жайгашкан $\mathrm{S}_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти болот.

Жалпы n −өзгөрүлмөлүү $u = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясын $\mathrm{M}_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ чекитиндеги $\frac{\partial u}{\partial x_i}$– жекече туундусу, функциянын графигинде жайгашкан $\mathrm{S}_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0; f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0))$ чекитинен, $(n+1)$ −ченемдүү S бетине (функциянын графигине), Оx_i огунун багыты боюнча жүргүзүлгөн T_{x_i} жаныма түзүнүн бурчтук коэффициенти $k_{T_{x_i}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)|_{(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)}$ болот.

- Бир өзгөрүлмөлүү функциянын чекиттеги туундусу убакыттын көз ирмеминдеги сызыктуу кыймылдын чекиттеги ылдамдыгын түшүндүрсө, эки өзгөрүлмөлүү функциянын жекече туундулары, механикалык жактан функциянын графиги болгон мейкиндиктеги бет боюнча кыймылдап бара жаткан материалдык чекиттин, туунду алынып жаткан өзгөрүлмөнүн багытына карай, убакыт ирмеминдеги өзгөрүү ылдамдыгын мүнөздөйт.

Мисалы термелүүчү кылдын бекитилген учунан x аралыгында узактыкта жайгашкан М чекитин, убакыттын t моментиндеги термелүү же четтеп – ийрейүү абалын, эки өзгөрүлмөлүү $u = u(x, t)$ функциясы менен сүрөттөөгө болот. Бул функциянын жекече $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$ туундуларына физикалык жана геометриялык жактан түшүндүрмө берели.

Убакыттын кайсы бир ирмемин $t = t_0$ деп фиксирлейли, анда ушул ирмемде термелген кыл $u = u(x, t_0)$ − ийрисинин абалында болот. Ал эми анын ($t = t_0$ *болгондогу*) жекече $\frac{\partial u}{\partial x}$ туундусу, $u = u(x, t_0) -$ ийрисиндеги абциссасы x болгон чекиттен ушул эле ийриге жүргүзүлгөн жаныманын бурчтук коэффициенти болот. Ал эми x аралыгын $x = x_0$ деп фиксирлесек, $u = u(x_0, t)$ функциясы – кылдагы координатасы x_0 болуп, фиксирленген М чекитин тең салмак абалынан четтөө же ийрейүү чоңдугун көрсөтөт. $\frac{\partial u}{\partial t} -$ жекече туундусу болсо, кылдагы М чекитинин убакыттын t ирмеминдеги чайпалуу (термелүү) ылдамдыгын түшүндүрөт.

10.1.3 Толук дифференцирлөө

Айталы $u = f(x, y)$ функциясы берилип, $f(x, y) \in C[D]$ (аныкталган жана үзгүлтүксүз) болсун. D областын xOy координаталар системасында жайгашкан деп, анын каалаган жеринен $\mathrm{M}_0(x_0; y_0) \in D$ чекитин алалы. Тандалган чекитке ар кандай Δx, Δy өсүндүлөрүн берген кезде D областынан чыгып кетпейт деген шарт коёлу

$M_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \in D$ (10.1– чийме). Бул учурда,

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \tag{10.5}$$

айырмасы $u = f(x, y)$ функциясын $(x_0; y_0)$ чекитиндеги **толук өсүндүсү** деп аталат. R^2 мейкиндигине киргизилген метриканын жардамы менен M_0 жана M_1 чекиттерин арасындагы аралыкты ченейли

$\rho = \rho(\mathrm{M}_0, M_1) = \sqrt{(x_0 + \Delta x - x_0)^2 + (y_0 + \Delta y - y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Мындан $\mathrm{M}_1 \to M_0 \Leftrightarrow \rho \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0 \ \wedge \ \Delta y \to 0$ умтулууларын тең күчтүү болорун көрөбүз. Анда

$$\lim_{\mathrm{M}_1 \to M_0} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho} \tag{10.6}$$

пределин мааниси: 1) $y = y_0$ турактуу сан болуп, M_1 чекити M_0 чекитине $y = y_0$ түзү боюнча $(\rho = \Delta x \to 0)$ жакындап келсе, $f'_x(x_0, y_0)$ *–же*кече туундусуна барабар болорун (10.1 – аныктамадан жана (10.1) жазылышынан) билебиз.

Бул учурда (10.3) тү пайдаланып, $\Delta_{x_0} u$ өсүндүсүн

$$\Delta_{x_0} u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + \alpha \Delta x \qquad (10.7)$$

көрүнүштө жазууга болот ($\Delta x \to 0 \;\Rightarrow\; \alpha \to 0$ умтулат же $\alpha = \alpha(\Delta x)$).

2). $x = x_0$ турактуу сан болуп, M_1 чекити M_0 чекитине $x = x_0$ түзү боюнча ($\rho = \Delta y \to 0$) умтулуп жакындаса, $f'_y(x_0, y_0)$ $-$жекече туундусуна барабар болору 10.1 – аныктамадан келип чыгат. $\Delta_{y_0} u$ өсүндүсүн

$$\Delta_{y_0} u = f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \beta \Delta y \qquad (10.8)$$

көрүнүштө жаза алабыз ($\Delta y \to 0 \;\Rightarrow\; \beta = \beta(\Delta y\,) \to 0$).

3) Эгерде M_1 чекити M_0 чекитине жогорудагыдай белгилүү түздөрдү бойлоп умтулбай, каалаган жолдор менен умтулса, анда (10.6) предели

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho} \qquad (10.9)$$

кош пределине тең күчтүү болот.

Бул үч учурдун 1) , 2) экөөсүндө (10.9) кош предели өзгөрүлмөлөрдүн бирөөсүн турактуу сан катары калтырып, экинчи өзгөрүлмөсү боюнча умтулуу менен эсептелди. Эгерде 3) – учурда (10.9) кош пределин чектүү маанисин табуу мүмкүн болсо, анда $u = f(x, y)$ функциясын $\text{M}_0(x_0; y_0$ чекитиндеги **толук өсүндүсүн** да (10.7), (10.8) жекече өсүндүлөрүнө окшош жазып, $\text{M}_0(x_0; y_0)$ чекитин чексиз жакынкы чеке белинде, $f(x, y)$ функциясын кандайдыр бир сызыктуу функция менен алмаштыруу мүмкүнбү? – деген суроо туулат. Бул суроого төмөндөгүдөй аныктама менен жооп беребиз.

10.2 Аныктама. $M_0(x_0; y_0)$ *чекитинде аргументтерге тиешелүү* $x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y$ *өсүндүлөрү берилген кезде,* $u = f(x, y)$ *функциясы да тиешелүү* (10.5) ***толук өсүндүсүнө*** *ээ болсо жана ал толук өсүндүнү*

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho \qquad (10.10)$$

көрүнүштө жазуу мүмкүн болсо, анда $u = f(x, y)$ *функциясын* $M_0(x_0; y_0)$ *чекитинде толук диффренцирленүүчү деп айтабыз.*

Мында $\begin{cases}\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0\end{cases}$ ⇨ $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ жана $\rho \to 0$.

$\rho \to 0$ умтулуу процесси, умтулуу жолун көрсөткөн $\{\Delta x, \Delta y\} \to 0$ өсүндүлөрүнө байланыштуу болгондуктан, бардык багыттардагы ар кандай жол менен нөлгө келсе да, (10.10) барабардыгын чексиз кичине бөлүгү, чексиз кичине бойдон каларын ачык көрсөтүү үчүн

$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$ көбөйтүндүсү жазылган. Иш жүзүндө бул чексиз кичине чоңдук (10.7) ни, (10.8) ге кошуу кезинде келип чыгат

$$\alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right) \cdot \rho = \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho \equiv o(\rho). \quad (10.11)$$

Мында $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \left(\alpha \cdot \frac{\Delta x}{\rho} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\rho}\right)$ жана $o(\rho)$ – "ρ го салыштырмалуу жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдук" .

Эгерде (10.10) орун алса, анда $M_0(x_0; y_0)$ чекитин жакынкы чеке белинде жайгашкан M(η; ξ) сыяктуу чекиттерде, $u = f(x, y)$ функциясын сызыктуу функция (түздүн же тегиздиктин кыркындысы) менен алмаштырууга болот (η ∈ $(x_0,\ x_0 + \Delta x)$, ξ∈ $(y_0, y_0 + \Delta y\ )$). Чынында эле (10.10) ну

$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) =$

$= f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$ көрүнүштө жазып, анын M(η; ξ) чекиттериндеги абалына токтолсок, б.а Δx аралыгындагы η , Δy аралыгындагы ξ маанилерин койсок, өсүндүлөр $\Delta x = \eta - x_0$, $\Delta y = \xi - y_0$ болуп,

$f(\eta, \xi) = f(x_0, y_0) + f_x'(x_0, y_0) \cdot (\eta - x_0) + f_y'(x_0, y_0) \cdot (\xi - y_0) +$

$+ \varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \rho$ теңдештигине ээ болобуз. Мындан $\varphi(\eta, \xi) = f(\eta, \xi)$,

A = $f(x_0, y_0)$, B = $f_x'(x_0, y_0)$, C = $f_y'(x_0, y_0)$ (A , B, C – турактуу сандар) белгилөөлөрүн киргизип, жогорку тартиптеги чексиз кичине чоңдукту таштап жиберип, сөз кылынган чеке белдин ичинде $u = f(x, y)$ функциясына эквиваленттүү болгон

$\varphi(\eta, \xi) = A + B \cdot (\eta - x_0) + C \cdot (\xi - y_0)$

тегиздиктин теңдемесине окшош сызыктуу функцияны алабыз.

Ошентип $M_0(x_0;y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчү функцияларды, бул чекиттин жакынкы чеке белинде сызыктуу функция көрүнүштө жазууга болот.

Эки өзгөрүлмөлүү $u=f(x,y)$ функциясын $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинде дифференцирленүүчүлүгүнөн, анын бул чекиттеги үзгүлтүксүздүгү келип чыгары, (10.10) теңдештигинен көрүнүп турат, анткени

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta u=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(f_x'(x_0,y_0)\cdot\Delta x+\ f_y'(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\varepsilon\cdot\rho\right)=0$$

аргументтердин өсүндүлөрү чексиз кичинерип нөлгө умтулган кезде, функциянын өсүндүсү да нөлгө тең $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta u=0$ болуп, үзгүлтүксүздүктүн өсүндүлөр тилиндеги аныктамасы аткарылат. Ошентип дифференцирленүүчү функция сөзсүз үзгүлтүксүз болот, б.а. функциянын үзгүлтүксүздүгү жана жана анын чектүү жекече туундуларынын жашашы, анын дифференцирленүүчүлүгүнүн **зарыл шарты** болуп эсептелет. Бирок **жетиштүү шарт** боло албайт, анткени айрым учурда, $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинде зарыл шарт аткарылганы менен функция дифференцирленбөөчү болуп калышы мүмкүн. Мисалы,

$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ функциясы O(0; 0) чекитинде

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot 0}-0}{\Delta x}=0,$$

$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-0}{\Delta y}=0$ жекече туундуларына ээ болуп, (10.5) боюнча $\Delta f(0,0)=\sqrt[3]{(0+\Delta x)\cdot(0+\Delta y)}-\sqrt[3]{0\cdot 0}=\sqrt[3]{\Delta x\cdot\Delta y}$, толук өсүндүсүн алат. Эгерде O(0,0) чекитинде функция дифференцирленүүчү деп ойлосок, анда бул чекиттеги толук өсүндүсү 10.2 – аныктамасынын негизинде

$$\Delta f(0,0)=f_x'(0,0)\cdot\Delta x+\ f_y'(0,0)\cdot\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho$$

(10.10) көрүнүштө жазылышы керек. Функциянын бул чекиттеги ар түрдүү көрүнүштөрдөгү толук өсүндүлөрүн теңдеп,

$\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\rho=\sqrt[3]{\Delta x\cdot\Delta y}$ же

$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y}}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$ теңдештигин алабыз. Дифференцирленүүчүлүктүн зарыл шарты боюнча, $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ умтулганда $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ чексиз кичитне чоңдук болушу керек. Бирок $\Delta x = \Delta y \to 0$ түзү боюнча умтулганда ($\Delta x = \Delta y > 0$)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot \Delta x}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta x)^2}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\sqrt{2} \cdot \Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{-\frac{1}{3}} = +\infty$$

келип чыгып, берилген функцияны O(0,0) чекитинде дифференцирленүүчү деген оюбуздун туура эмес экендигин көрөбүз.

Демек, берилген чекитте функциянын дифференцирленүүчүлүгү үчүн кошумча жетиштүү шарт аткарылуусу керек.

10.1 Теорема. $u = f(x, y)$ *функциясын* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинде дифференцирленүүчү болушу үчүн, бул чекиттин чеке белинде* f'_x, f'_y *жекчече туундуларын жашашы жана экөөсүнүн тең* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитин өзүндө үзгүлтүксүз болушу* ***жетиштүү шарт*** *болуп эсептелет.*

Далилдөө. ►Чынында эле $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги функциянын өсүндүсүн

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= \{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)\} + \{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\}$$

көрүнүшүнө өзгөртүп, ар бир фигуралдык кашаанын ичиндеги айырмалардын биринчисин $]x_0,\ x_0 + \Delta x[$ аралыгында x боюнча, экинчисин $]y_0,\ y_0 + \Delta y[$ аралыгында y боюнча бир өзгөрүлмөлүү функция сыяктуу карап, орточо маани жөнүндөгү теореманы колдонсок,

$$\Delta u = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y \quad (10.12)$$

($0 < \theta_1, \theta_2 < 1$) теңдештигине ээ болобуз. Теореманын шарты боюнча f'_x, f'_y жекче туундулары M_0 чекитинде үзгүлтүксүз болгондуктан, каралган чексиз кичине интервалдагы (M_0 дун чеке белиндеги) маанилери бири – биринен чексиз кичинеге гана айырмаланып, аларды

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1,$$

$f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2$ көрүнүштөрдө жазууга болот. Мында Δx, Δy менен кошо $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ да нөлгө умтулат деп эсептелет. Жекече туундулардын туюнтулган маанилерин (10.12) ге коюп, функциянын өсүндүсүнө

$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x,$ же

$\mathrm{o}(\rho) = \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x$ белгилөөсүн киргизип,

$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \mathrm{o}(\rho)$ көрүнүшкө келтире алабыз, анда 10.2 – аныктаманын (10.10) шарты аткарылып, $u = f(x, y)$ функциясы M_0 чекитинде дифференцирленүүчү экендиги далилденген болот.◄

Жогорудагы мисалда $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ функиясын O(0;0) чекитинде дифференцирленбөөчү болгондугун себеби, анын f'_x, f'_y жекече туундуларын бул чекитте үзүлүшкө ээ экендиги менен, же жетишерлик шарттын аткарылбагандыгы менен түшүндүрүлөт. Чынында эле $f'_x = \frac{y}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$ жана $f'_y = \frac{x}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$ жекече туундулары O(0;0) чекитинде үзүлүшкө ээ болушат.

Жалпы nөзгөрүлмөлүү $u = f(x) = \mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциясын толук өсүндүсү

$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n + \varepsilon \cdot \rho$ көрүнүштө жазылат. Мында $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$.

10.1.4 Функциянын толук жана жекече дифференциалдары

Эгерде $u = f(x, y)$ функциясы $\mathrm{M}(x;\, y) \in D$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын толук өсүндүсү

$\Delta u = f'_x(x, y) \cdot \Delta x + f'_y(x, y) \cdot \Delta y + \varepsilon \cdot \rho$ көрүнүштө жазыларын, 10.2 – аныктамадан же (10.10) теңдештигинен билебиз. $(x;\, y)$ чекитине чексиз жакын чеке белде, бул толук өсүндү чексиз кичине чоңдук болгондуктан, анын жогорку тартиптеги чексиз кичине бөлүгүн таштап жибергенден кийинки башкы бөлүгү (сызыктуу бөлүгү), берилген функциянын ушул чекиттеги толук дифференциалы деп аталат жана $du = f'_x(x,y) \cdot \Delta x + f'_y(x,y) \cdot \Delta y$ көрүнүштө жазылат. Мында функциянын толук өсүндүсүн $\Delta u \approx du$ менен жакындаштырып алмаштырдык. $\Delta x,\ \Delta y$ өсүндүлөрүн $x,\ y$ өзгөрмөлөрүн дифференциалдары менен алмаштырып, толук дифференциалды көбүнчө

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \qquad (10.13)$$

көрүнүштө жазуу макулдашылган.

Ошондой эле n −өзгөрүлмөлүү $u = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясынын толук дифференциалы

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}dx_k = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + \ \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n, \qquad (10.14)$$

көрүнүштө жазылат.

Мисалы, $u = x^2 + y^2 + z^2$ функциясын толук дифференциалы

$$du = (x^2 + y^2 + z^2)'_x\, dx + (x^2 + y^2 + z^2)'_y\, dy + (x^2 + y^2 + z^2)'_z\, dz =$$

$= 2x\, dx + 2y\, dy + 2z\, dz$ көрүнүштө табылат.

$d_x u = f'_x(x,y)dx$ туюнтмасын $u = f(x,y)$ функциясын x өзгөрүлмөсү боюнча жекече дифференциалы деп атап, жалпы учурда n өзгөрүлмөлүү функциянын x_i өзгөрүлмөсү боюнча жекече дифференциалын $d_{x_i}u = \frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i$ көрүнүштө жазабыз ($1 \leq i \leq n$). Жекече диффренциалдарды пайдаланып, (10.13) жана (10.14) толук дифференциалдарын

$$du = d_x u \ + \ d_y u\,, \qquad du = \sum_{k=1}^{n} d_{x_k}u$$

көрүнүштөрдө жазууга болот.

Жакындаштырылган $\Delta u \approx du$ маанилери бири – биринен

$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \cdot \mathrm{o}(\rho)$ көрүнүштөгү чексиз кичине чоңдуктарга айырмаланышып, аргументтердин $\Delta x, \Delta y$ өсүндүлөрү нөлгө канчалык жакын келсе, ошончолук тактыкта жакындаша беришет.

Мисалдар

1) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ функциясын (1; 2) чекитиндеги жекече туундуларын жана толук дифференциалын тапкыла.

Чыгаруу: ►Берилген функциянын эркин алынган $(x; y)$ чекитиндеги жекече туундуларын жана толук дифференциалын эсептейбиз. Жекече туундуларын

таап, $f'_x(x, y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $f'_y(x, y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ толук дифференциалын жекече туундулары менен

$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ көрүнүштө жазабыз. $x = 1$, $y = 2$ маанилерин коюп, берилген функциянын (1; 2) чекитиндеги жекече туундулары $f'_x(1, 2) = \frac{2}{5}$, $f'_y(1, 2) = -\frac{1}{5}$, толук дифференциалы $df(1; 2) = \frac{1}{5}(2dx - dy)$ болорун көрөбүз. ◄

2) $$u = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y}, \text{ эгерде } xy \neq 0, \\ x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad \text{эгерде } x \neq 0,\ y = 0, \\ y^2 \sin\frac{1}{y}, \quad \text{эгерде } y \neq 0,\ x = 0, \\ 0, \quad \text{эгерде } x = y = 0 \end{cases}$$

функциясын жекече туундулары O(0;0) чекитинде үзүлүүгө ээ болгону менен, дифференцирленүүчү болорун далилдегиле.

Далилдөө : ►Берилген функциянын жекече туундуларын табалы:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \text{эгерде } x \neq 0, \\ 0, \quad \text{эгерде } x = 0 \text{ болсо,} \end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin\frac{1}{y}-\cos\frac{1}{y}\ ,\text{эгерде } y\neq 0,\\ 0\ , \quad \text{эгерде } \ y=0 \text{ болсо}.\end{cases}$$

Анда $f'_x(x,y)$ функциясы $(0;y)$ чекиттеринде же болбосо бүтүндөй Оy огундагы чекиттерде үзүлүшкө ээ болорун, б.а. бул чекиттердеги

$\lim\limits_{x\to 0} f'_x(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ предели көп маанилүү болуп, $[-1,\ 1]$ сегментин толтурарын байкайбыз. Ошондой эле $f'_y(x,y)$ функциясы $(x;0)$чекиттеринде үзүлүшкө ээ болот, анткени жогорудагыдай эле $\lim\limits_{y\to 0}\left(2y\sin\frac{1}{y}-\cos\frac{1}{y}\right)$ предели анык бир мааниге ээ болбойт, же жашабайт. Ага карабастан

$df(0{,}0)=f'_x(0{,}0)dx+f'_y(0{,}0)dy=0\cdot dx+0\cdot dy=0$ болуп, функциянын O(0;0) чекитинде дифференцирленүүчү экендигин көрөбүз.◄

§ 10.2 Көп өзгөрүлмөлүү татаал функцияны дифференцирлөө

10.2.1 Татаал функциянын туундусун эсептөө эрежеси

Айрым учурларда $u=f(x,y)$ функциясын аргументтери болгон x,y өзгөрүлмөлөрүн өздөрү да башка бир же бир канча өзгөрүлмөлөрдөн көз каранды болуп калышы мүмкүн. Мисалы $f(x,y)=e^x\cos y$ эки өзгөрүлмөлүү функциясын аргументтери өз кезегинде $x=z\cdot t=\varphi(z,t)$, $y=z+t=\psi(z,t)$ көрүнүштөгү функциялар болушса, анда аны

$f(x,y)=f[\varphi(z,t),\psi(z,t)]=e^{z\cdot t}\cos(z+t)=F(z,t)$ көрүнүштөгү эки өзгөрүлмөлүү татаал функция деп эсептөөгө болот. Ал эми $f(x,y)=x^2+y^2$ функциясында $x=\sin t$, $y=t^2$ болсо, анда

$f(x,y)=\ f[\sin t\,,t^2]=sin^2t+t^4=F(t)-$бир өзгөрүлмөлүү татаал функция болот.

Бул учурда xOy координаттык тегиздигин D областында аныкталган $u=f(x,y)$ функциясы, кандайдыр бир $zO't$ координаттык тегиздигиндеги G областында аныкталган $u=F(z,t)=$

$f[\varphi(z,t),\psi(z,t)]$ татаал функциясын түзөт. Мында $(z;t)$ чекиттери G областында өзгөргөн кезде, $(x;y)$ чекиттери D областынын чегинен чыгып кете албайт деп эсептелет.

- Айталы, $u=f(x,y)$ функциясы кандайдыр бир $\mathrm{G}=]t_0,\ t_1[$ интервалында бир өзгөрүлмөлүү татаал функция болсун же аргументтери да

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (t_0<t<\ t_1), \tag{10.15}$$

бир t өзгөрүлмөсүнөн функциялар болушсун.

10.2 Теорема. *Эгерде (10.15) функцияларынын*

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t),\ \ \frac{dy}{dt}=\psi'(t)$$

туундулары жашашса жана $x=\varphi(t),\ \ y=\psi(t)$ маанилерин койгондо $f(x,y)$ функциясы дифференцирленүүчү болсо, анда $u=f[\varphi(t),\psi(t)]$ татаал функциясы t чекитинде туундуга ээ болуп, туундусу

$$u_t'=f_x'\cdot\varphi'(t)+f_y'\cdot\psi'(t)\ \ \textit{же}\ \ \frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \tag{10.16}$$

ыкмалары менен эсептелет.

Далилдөө. ►Эгерде t өзгөрүлмөсүнө $\Delta t\neq 0$ өсүндүсүн берсек, анда x,y өзгөрүлмөлөрү да тиешелүү

$\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$, $\Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)$ өсүндүлөрүнө ээ болуп, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}\neq 0$ болгондуктан, $u=f(x,y)$ функциясы да $(x;\ y)$ чекитинде нөлдөн айырмалуу Δu өсүндүсүнө ээ болорун көрөбүз. Теореманын шарты боюнча $u=f(x,y)$ бул чекитте дифференцирленүүчү болгондуктан, анын (10.10) толук өсүндүсүн (10.11) белгилөөсүн пайдаланып,

$$\Delta u=\ f_x'(x,y)\cdot\Delta x\ +\ f_y'(x,y)\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x+\ \beta\cdot\Delta y\ .$$

көрүнүштө жаза алабыз. Экинчи жактан $x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$ функцияларын t чекитинде туундулары жашагандыктан, бул чекитте үзгүлтүксүз болушуп, аргументтин өсүндүсү менен кошо функциялардын тиешелүү өсүндүлөрү да нөлгө умтулушат, же

$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0 \end{cases}$ шарты аткарылат. Табылган Δu толук өсүндүсүн Δt га бөлүп жиберип, $(x;\ y)$ чекитиндеги $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ жекече туундуларын турактуу деп алып $\Delta t \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк,

$$u'_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f'_x(x,y)\cdot\Delta x + f'_y(x,y)\cdot\Delta y + \alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x,y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x,y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} +$$

$$+ \alpha\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x,y)\cdot\varphi'(t) + f'_y(x,y)\cdot\psi'(t) + 0\cdot\varphi'(t) +$$

$+\ 0\cdot\psi'(t) = f'_x\cdot\varphi'(t) + f'_y\cdot\psi'(t)$ келип чыгып, (10.16) ыкмаларынын туура экендиги далилденет.◄

Мисалы $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x = \sin t$, $y = t^2$ татаал функциясын t өзгөрүлмөсү боюнча туундусу $\frac{df}{dt} = (x^2+y^2)'_x\cdot x'_t + (x^2+y^2)'_y\cdot y'_t =$

$$= 2x\cdot\cos t + 2y\cdot 2\,t = 2x\cdot\cos t + 4yt = 2\sin t\cos t + 4t^2\cdot t = \sin 2t + 4t^3.$$

∘ Айталы, $u = f(x,y)$ функциясын аргументтерин бирөөсү экинчи өзгөрүлмөсүнөн функция болуп, экинчиси көз каранды эмес өзгөрүлмө бойдон кала берсин. Мисалы $x = x$, $y = \psi(x)$, анда $u = f\big(x,\psi(x)\big)$ татаал функциясын x боюнча туундусу (10.16) ыкмасы боюнча,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (10.17)$$

эрежеси менен эсептелерин көрөбүз. Мисалы $f(x,y) = \sin(x\cdot y^2)$ функциясында $y = \mathrm{e}^x$ болсун, анда (10.17) ни колдонуп, берилген функциянын x боюнча туундусун

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (\sin(x\cdot y^2)\,)'_x + (\sin(x\cdot y^2))'_y\cdot(\mathrm{e}^x)'_x = y^2\cos(x\cdot y^2) +$$

$$+2xy\cos(x\cdot y^2)\cdot\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x}\cos(x\mathrm{e}^{2x}) + 2x\mathrm{e}^x\cos(x\mathrm{e}^{2x})\,\mathrm{e}^x =$$

$= \mathrm{e}^{2x}\cos(x\mathrm{e}^{2x})\cdot(1+2x)$ көрүнүштө эсептейбиз.

∘ Айталы $x = \varphi(z,t)$, $y = \psi(z,t)$ болуп, $u = f(x,y)$ функциясы

$f(x,y) = f[\varphi(z,t),\psi(z,t)] = F(z,t)$ көрүнүштөгү эки өзгөрүлмөлүү татаал функция болсун. Бул учурда: 1) $(z;\ t)$ чекитинде $x = \varphi(z,t)$,

$y=\psi(z,t)$ функцияларын $\frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial t}$ жана $\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial t}$ жекече туундулары да үзгүлтүксүз функциялар болушса;

2) $(z;\ t)$ чекитине тишелеш болгон $(x;\ y)=\big(\varphi(z,t);\ \psi(z,t)\big)$ чекитинде, $f(x,y)$ дифференцирленүүчү функция болсо. анда $f[\varphi(z,t),\psi(z,t)]$ татаал функциясы $(z;\ t)$ чекитинде $\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial t}$ жекече туундуларына ээ болорун көрсөтүп, аларды эсептөө ыкмаларын табалы:

$\frac{\partial f}{\partial z}$ жекече туундусун эсептөөнүн жүрүшүндө t өзгөрүлмөсү турактуу сан катары эсептелгендиктен, иш жүзүндө $x=\varphi(z,t)$, $y=\psi(z,t)$ функцияларын бир гана z өзгөрүлмөсүнөн көз каранды болгон бир өзгөрүлмөлүү функциялар катарында эсептөөгө болот. Ошондуктан $\frac{\partial f}{\partial z}$ жекече туундусун бир өзгөрүлмөлүү татаал функциянын туундусуна окшоштуруп (10.16) формуласын колдонсок,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} \qquad (10.18)$$

эрежесине ээ болобуз. Ушундай эле талкуулоо менен

$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$ берилген татаал функциянын t өзгөрүлмөсү боюнча туундусу табылат.

Жалпы учурда көп өзгөрүлмөлүү $f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ функциясын аргументтери

$x_1=\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $x_2=\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $x_3=\varphi_3(t_1,t_2,\dots,t_m)$, . . . , $x_n=\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)$ көрүнүштөрдөгү функциялар болушса, анда $u=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)=$

$=f[\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_m),\varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_m),\dots,\varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_m)]=F(t_1,t_2,\dots,t_m)$ көрүнүштөгү m өзгөрүлмөлүү татаал функция болуп эсептелет. Бул учурда деле татаал функциядан туунду алуунун (10.16) эрежеси сакталат, анткени $(t_1,t_2,\dots,t_m)\in G\subseteq R^m$ аргументтерин жана арадагы $(x_1,x_2,x_3\dots,x_n)\in D\subseteq R^n$ өзгөрүлмөлөрүн саны канча болгонуна карабастан, t_i же x_j боюнча туунду алуунун жүрүшүндө калган өзгөрүлмөлөр турактуу деп эсептелишет $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$.

Ошентип, жогорудагы 1) , 2) – сыяктуу шарттар аткарылган кезде $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ функциясын t_i өзгөрүлмөсү боюнча туундусу

$F'_{t_i} = f'_{x_1} \cdot (\varphi_1)'_{t_i} + f'_{x_2} \cdot (\varphi_2)'_{t_i} + f'_{x_3} \cdot (\varphi_3)'_{t_i} + \ \dots + f'_{x_n} \cdot (\varphi_n)'_{t_i}$ же

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_i} + \ \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} \qquad (10.19)$$

эрежеси менен эсептелет.

Мисалы 1) $u = e^{z^2 sin^2 t + 2zt\ sinz \sin t + t^2}$ функциясында $x = z^2 sin^2 t$, $y = 2zt\ sinz \sin t, \eta = t^2$ көрүнүштөгү функциялар десек, анда

$u = e^{x+y+\eta}$ татаал функциясына ээ болобуз. Бул учурда татаал функциянын z, t өзгөрүлмөлөрү боюнча туундулары

$$\blacktriangleright \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial z} = (e^{x+y+\eta})'_x \cdot (z^2 sin^2 t)'_z +$$

$$+ (e^{x+y+\eta})'_y \cdot (2zt\ sinz \sin t)'_z + (e^{x+y+\eta})'_\eta \cdot (t^2)'_z = e^{x+y+\eta} \cdot 2z\ sin^2 t +$$

$$+ \ e^{x+y+\eta}(2t \sin z \sin t + 2zt \cos z \sin t) + e^{x+y+\eta} \cdot 0 = 2e^{x+y+\eta}(z\ sin^2 t +$$

$$+ t \sin z \sin t + zt \cos z \sin t) = 2e^{z^2 sin^2 t + 2zt\ sinz \sin t + t^2}(z sin^2 t +$$

$$+ t \sin z \sin t + t\, \mathrm{z} \cos z \sin t)\ ;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = (e^{x+y+\eta})'_x \cdot (z^2 sin^2 t)'_t +$$

$$+ (e^{x+y+\eta})'_y \cdot (2zt\ sinz \sin t)'_t + (e^{x+y+\eta})'_\eta \cdot (t^2)'_t =$$

$$= e^{x+y+\eta} \cdot (z^2 2 \sin t\ cos\ t + 2z \sin z \sin t + 2zt \sin z \cos t + 2t) =$$

$$= 2e^{z^2 sin^2 t + 2zt\ sinz \sin t + t^2}(z^2 \sin t\ cos\ t + z \sin z \sin t + zt \sin z \cos t + t)$$

көрүнүштөрдө эсептелет.◀

2) $f(x, y) = \sin \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ функциясын жекече туундуларын тапкыла.

Чыгаруу: ▶$u = \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ белгилөөсүн киргизип, татаал функциянын дифференциалы катарында $df = d(\sin u) = \cos u\, du$ эрежесин колдонобуз. Оболу бөлчөктүн дифференциалы катарында

$du = d\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right) = \frac{(x^3+y^3)\cdot d(x^2+y^2) - (x^2+y^2)\cdot d(x^3+y^3)}{(x^3+y^3)^2}$ эсептеп алалы. $d(x^2+y^2) = 2xdx + 2ydy$, $d(x^3+y^3) = 3x^2dx + 3y^2dy$

болгондуктан,

$$du = \frac{(x^3+y^3)(2xdx+2ydy) - (x^2+y^2)(3x^2dx+3y^2dy)}{(x^3+y^3)^2} =$$

$= \frac{(-x^4-3x^2y^2+2xy^3)dx+(2x^3y-3x^2y^2-y^4)dy}{(x^3+y^3)^2}$ ээ болобуз. Сөз кылынган эрежени эске алып,

$df = \cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{(-x^4-3x^2y^2+2xy^3)dx+(2x^3y-3x^2y^2-y^4)dy}{(x^3+y^3)^2}$ ээ болобуз. Мындан dx, dy терге көбөйтүлгөн коэффициенттерди өз - өзүнчө бөлүп жазып, талап кылынган жекече туундууларды

$$f'_x(x,y) = \frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{(x^3+y^3)^2}\cdot\cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3},$$

$f'_y(x,y) = \frac{2x^3y-3x^2y^2-y^4}{(x^3+y^3)^2}\cdot\cos\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$ табабыз.◄

10.2.2 Татаал функциянын толук дифференциалы жана жазылуу формасынын сакталышы (инварианттуулугу)

Эгерде $u = f(x,y)$ функциясы x, y өзгөрүлмөлөрү боюнча дифференцирленүүчү болсо, анда (10.13) боюнча анын толук дифференциалы $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$ көрүнүштө жазыларын билебиз. Айталы x, y аргументтери да өз кезегинде $x = \varphi(z,t)$, $y = \psi(z,t)$ эки өзгөрүлмөлүү функциялар болушуп, берилген функция

$u = f([\varphi(z,t), \psi(z,t)]$ көрүнүштөгү татаал функция болсун. Бул учурда: 1) $\varphi(z,t)$, $\psi(z,t)$ функцияларын $(z;\, t)$ чекитинде z, t өзгөрүлмөлөрү боюнча үзгүлтүксүз $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ жекече туундулары жашаса же бул чекитте дифференцирленүүчү болушса;

2) Тиешелүү$(x;\, y)$ чекитинде $u = f(x,y)$ функциясы диффренцирленүүчү болсо же $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ жекче туундулары үзгүлтүксүз функциялар болушса.

Анда $u = f([\varphi(z,t), \psi(z,t)]$ татаал функциясын $(z;\ t)$ чекитиндеги жекече туундулары (10.18) эрежесинин негизинде

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ жана } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad (10.20)$$

көрүнүштөрдө эсептелерин билебиз. Барабардыктардын оң жактарында үзгүлтүксүз функциялар турушкандыктан, алардын сол жактарындагы $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ функцияларын да $(z;\ t)$ чекитинде үзгүлтүксүз экендиги келип чыгат. Андай болсо, $u = f([\varphi(z,t), \psi(z,t)]$ татаал функциясы үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ функция катарында $(z;\ t)$ чекитинде дифференцирленүүчү функция экендигин көрөбүз. Демек, анын толук дифференциалын (10.13) көрүнүштө

$du = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial t} dt$ деп жаза алабыз. Бул теңдештикке $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}$ жекече туундуларын (10.20) маанилерин коюп,

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dz + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) dt \qquad (10.21)$$

татаал функциянын толук дифференциалын эсептөө эрежесине ээ болобуз.

Жалпы учурда $u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ жана $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m)$,

$x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, $x_3 = \varphi_3(t_1, t_2, \ldots, t_m)$, . . . , $x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ болгондо,

$f[\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_m), \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_m), \ldots, \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_m)] = F(t_1, t_2, \ldots, t_m)$

m өзгөрүлмөлүү татаал функциянын толук дифференциалы 1), 2) – сыяктуу шарттарда

$$du = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}\right) dt_i\,, \quad (10.22)$$

$$\text{же } du = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial t_i} dt_i \qquad (10.23)$$

көрүнүштөрдө эсептелет.

Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын (10.13) толук дифференциалын, көп өзгөрүлмөлүү татаал функциялардын (10.21), (10.22), (10.23) толук дифференциалдарына салыштырып, алардын жазылуу формаларынын бузулбаганын байкайбыз. Чынында эле алардын бардыгында, адегенде өзгөрүлмө боюнча туундусу, андан кийин ошол өзгөрүлмө боюнча дифференциал көбөйтүлгөн ырааттуулук сакталган. **Бул дифференциалдын жазылуу формасынын инварианттуулугу же инварианттуулуктун сакталышы** деп аталат.

Мисалы $f(\tau,t)=\sin(\tau^2t^3)$ функциясын толук дифференциалын табуу үчүн $x=\tau^2,\ y=t^3$ белгилөөлөрүн киргизсек, ал

$f(x,y)=\sin(xy)$ көрүнүшүнө келет. (10.20) формулалардын жардамы менен

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \tau}=y\cos(xy)\cdot 2\tau+x\cos(xy)\cdot 0=2\tau y\cos(xy),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=y\cos(xy)\cdot 0+x\cos(xy)\,3t^2=3t^2x\cos(xy)$$

жекече туундуларын таап, (10.21) нин негизинде

$$df(\tau,t)=2\tau y\cos(xy)\,d\tau+3t^2x\cos(xy)d\,t=\cos(\tau^2t^3)\cdot(2\tau t^3\,d\tau+3t^2\tau dt)$$

мисалдагы татаал функциянын толук дифференциалын табабыз.

§10.3 Айкын эмес функциянын туундусу

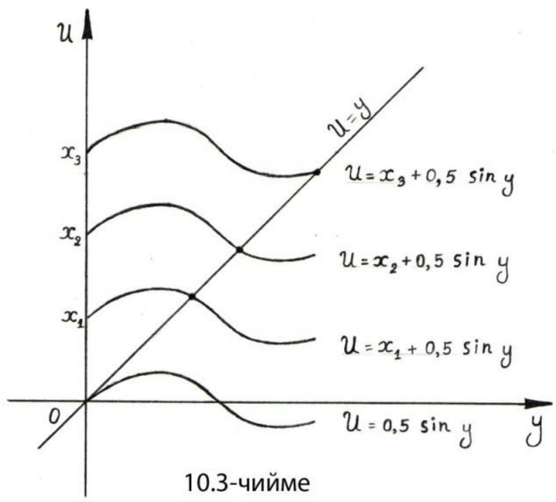
$F(x,y)=0$ теңдемеси берилип, анын сол жагындагы $F(x,y)$ туюнтмасы xOy координаттык тегиздигинде жайгашкан, кандайдыр бир D областында аныкталган эки өзгөрүлмөлүү функция болсун. Эгерде D областында жайгашкан $(x_0;y_0)$ чекитин жакынкы $\rho[(x_0;y_0),(x;\ y)]<h$ чеке белине таандык бардык $(x;\ y)$ чекиттери үчүн, $(x_0-h,\ x_0+h)$ интервалында жайгашкан ар бир x тин маанисине карата,

(y_0-h,y_0+h) интервалынан бир гана $y=\ y(x)$ мааниси табылып, $(x,y(x))$ түгөй маанилери көрсөтүлгөн интервалдарда берилген $F\big(x,y(x)\big)=0$ теңдемесине чечим болушса, анда ушул интервалдардын чегинде $F(x,y)=0$ теңдемесинен: y өзгөрүлмөсү, x өзгөрүлмөсүнө карата айкын функция катарында аныкталат дейбиз.

Демек, бул интервалда $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)$ (10.24)

теңдештиги орун алып, y ке карата чыгарылбаган учурда $F(x,y) = 0$ теңдемеси айкын эмес функция, ал y ке карата $y = y(x)$ көрүнүштө чыгарылган болсо, айкын функцияга айланат. Мында h жетишерлик кичине туруктуу сан болуп, R^2 мейкиндигинде тандалган метрикага ылайык борбору $(x_0; y_0)$ чекити болгон тегеректин радиусу, же болбосо диогоналдарын кесилиши $(x_0; y_0)$ чекити болгон квадраттын жагынын $2h$ узундугун тең жарымы болот.

Мисалдар : 1). $x^3 - y = 0$ айкын эмес көрүнүштө берилген функцияны, y карата теңдеме катары чыгарып, $y = x^3$ көрүнүштөгү бир маанилүү айкын функция катарында жазса болот.



10.3-чийме

2). $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ теңдемеси менен, графиги эллипс болгон айкын эмес функцияны берүүгө болот. Эллипстин айкын көрүнүштөгү теңдемеси эки маанилүү болуп, жогорку жана төмөнкү деп аталышкан эки канаттан турат:

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ функциясын $0x$ огунун үстүндөгү бөлүгү "+" белгиси менен, төмөн жагындагы бөлүгү "–" белгиси менен алынат.

3). $5x^2 + 2y^2 + 9 = 0$ теңдемеси менен берилген айкын эмес функцияны x тин чыныгы маанилери үчүн, y ке карата чыгаруу мүмкүн эмес (кош мааниде мүмкүн), же аны чыныгы аргументтүү айкын функция көрүнүштө жаза албайбыз.

4). $y - x + 0,5 \cdot \sin y = 0$ теңдемеси менен берилген айкын эмес функцияны, теориялык жактан y ке карата $y = y(x)$ көрүнүштөгү чечими жашары чын болгону менен, иш жүзүндө анын y ке карата чыгаруу мүмкүн эмес же элементардык функциялар менен туюнтулган чечими табылбайт. Чынында эле бул айкын эмес функцияны, ага теңдеш $\begin{cases} u = y, \\ u = x + 0,5 \cdot \sin y \equiv 0 \end{cases}$ параметрдик функциясына (x ти параметр деп алып) өзгөртүп, uOy координаттык тегиздигиндеги графиктерин салыштырсак , алардын графиктери адегенде

$(x;\ y) = (0; 0)$ чекитинде, андан кийин чекиз көп $(x_i;\ y_i)$ чекиттеринде ($i = 1, 2, \dots$) кесилише берүү мүмкүнчүлүгү бар экендигин көрөбүз. Демек, бул кесилишүү чекиттеринде теориялык жактан $y = y(x)$ туюнтуусун ишке ашыруу мүмкүн дегенди түшүндүрөт (10.3 – чийме).

Мисалдардан көрүнгөндөй (10.24) теңдештиги ар дайыма эле орун ала бербейт, же $F(x, y) = 0$ теңдемеси айкын функция болбой калышы да мүмкүн.

10.3 Теорема. *Айталы төмөндөгүдөй шарттар аткарылсын:*

1) Эки өзгөрүлмөлүү $F(x, y)$ функциясы, кандайдыр бир диогоналдарын кесилиши $(x_0; y_0)$ чекити, жактарынын узундугу $2\mathrm{h}_1$ жана $2\mathrm{h}_2$ болгон D төрт бурчтугун ичинде аныкталган жана үзгүлтүксүз функция болсун (10.4 – чийме). Мында

$D = \{(x; y) |\ x_0 - h_1 < x < x_0 + h_1, y_0 - h_2 < y < y_0 + h_2\}.$

2) $(x_0; y_0)$ чекитинде $F(x, y)$ нөлгө айлансын $F(x_0, y_0) = 0$;

3) D төрт бурчтугун ичинде үзгүлтүксүз $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ жекече туундулары жашашсын;

4) $(x_0; y_0)$ чекитинде $\frac{\partial F}{\partial x}$ жекече туундусу $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}|_{(x_0;y_0)} \neq 0$ нөлдөн айырмалуу болсун, же y ти трактуу деп алганда $F(x, y)$ функциясы x ке карата монотондуу өсүүчү (кемүүчү) болсун .

Анда 1) $(x_0; y_0)$ чекитин жетишерлик кичине деп алынган ε - чеке белинде $F(x, y) = 0$ теңдемесинен y ти x ке карата бир маанилүү $y = y(x)$ көрүнүштөгү функция катары туюнтууга болот ;

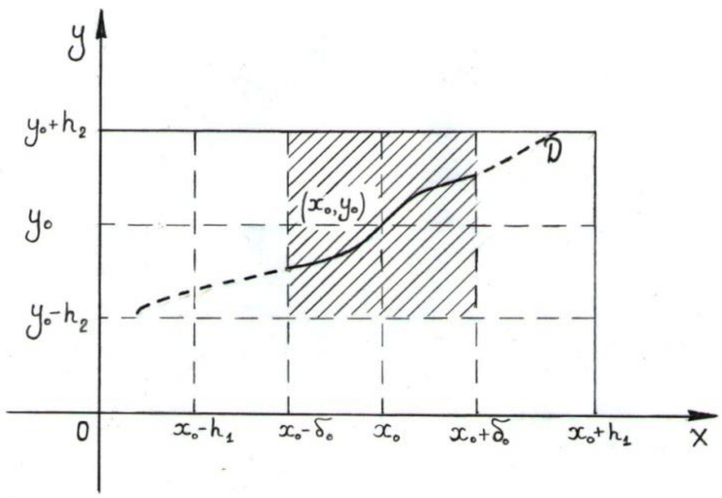
2) $x = x_0$ болгондо $y_0 = y(x_0)$ болуп, $x_0 - \delta_0 < x < x_0 + \delta_0$ аралыгында $|y - y_0| = |y - y(x_0)| < \varepsilon$ шарты аткарылат же $y = y(x)$ функциясы x_0 чекитинде үзгүлтүксүз болот.

3) $(x_0; y_0)$ *чекитинде* $F(x_0, y_0) = F(x_0, y(x_0)) \equiv 0$ *теңдештиги орун алат;*

4) $y = y(x)$ *функциясы* x_0 *чекитинде үзгүлтүксүз дифференцирленүүчү функция болуп, анын туундусу*

$$y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad (9.29)$$

эрежеси менен табылат (9 – гл., 9.2.4 – теманы кара).



10.4-чийме

Айкын эмес функциянын жашашын далилдөөсүз кабыл алып, $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x)$ орун алат деп эсептеп, (9.29) эрежесин келтирип чыгаралы. Эгерде $y = y(x)$ функциясын аргументине $x + \Delta x$ өсүндүсүн берсек, үзгүлтүксүз функция катарында $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$ өсүндүсүнө ээ болобуз. Шарт боюнча алар $F(x + \Delta x\, , y + \Delta y) = 0$ теңдемесин канааттандырышат. Анда эки өзгөрүлмөлүү функциянын толук өсүндүсү $\Delta F(x,y) = F(x + \Delta x\, , y + \Delta y) - F(x,y) = 0$ көрүнүштө болот. Экинчи жактан бул толук өсүндүнү (10.10), (10.11) – лерди пайдаланып, $\Delta F(x,y) \equiv F'_x(x,y) \cdot \Delta x + F'_y(x,y) \cdot \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y = 0$ табабыз. Мындан $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x,y)+\alpha}{F'_y(x,y)+\beta}$ теңдештигине ээ болуп, $\Delta x \to 0$ умтулгандагы пределге өтсөк

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} = -\frac{F'_x(x,y(x))}{F'_y(x,y(x))},$$

(9.29) эрежесин туура экендиги келип чыгат.

Жалпы учурда n өзгөрүлмөлүү айкын эмес функция

$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ көрүнүштө жазылат. Мисалы эки өзгөрүлмөлүү айкын эмес функцияны

$F(x, y, u) = 0 \Leftrightarrow u = \mathfrak{f}(x, y)$ көрүнүштө жазып, 10.3 – теоремасын R^3 мейкиндигиндеги диогоналдарын кесилишинде $(x_0; y_0; u_0)$ чекити турган параллелопипедке жайылтсак, $\mathfrak{f}(x, y)$ тин $x,\ y$ боюнча дифференцирленүүчү экендиги келип чыгат. Чынында эле $F\big(x, y, \mathfrak{f}(x, y)\big) = 0$ болгондуктан, жекече өсүндүлөрү да нөлгө тең болушуп

$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ барабардыктарына ээ болобуз. Мындан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0\right) \qquad (10.25)$$

эки өзгөрүлмөлүү айкын эмес функциялардын жекече туундуларын эсептөө эрежелерин келтирип чыгарабыз.

Мисалы 1) $F(x, y, u) = 0$ айкын эмес функция көрүнүштө

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{c^2} - 1 = 0$ эллипсоиди берилген, аны 10.3 – теореманын шарттарын канааттандырган чекиттерде $u = \mathfrak{f}(x, y)$ көрүнүшкө келтирүүгө болот деп эсептеп, $f'_x,\ f'_y$ жекече туундуларын табайлы. $F'_x = \frac{2x}{a^2}$, $F'_y = \frac{2y}{b^2}$, $F'_u = \frac{2u}{c^2}$ үзгүлтүксүз жекече туундулары жашап, $F'_u \neq 0$ болгон учурда (10.25) формуласын негизинде

$f'_x = -\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2u}{c^2}} = -\frac{c^2 x}{u \cdot a^2} = -\frac{c^2 x}{u \cdot a^2};\qquad f'_y = -\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2u}{c^2}} = -\frac{c^2 y}{b^2 u}$ талап кылынган жекече туундуларды тапкан болобуз.

2) Айкын эмес көрүнүштөгү $F(x, y, z) \equiv x^2 y - y^2 z + zx = 0$ теңдемеси менен берилген функциянын, жекече туундуларын табуунун үч ыкмасын көрсөтөлү:

►А) Берилген теңдемени z ке карата чыгарып, $z = \frac{x^2 y}{y^2 - x}$ көрүнүштөгү айкын функцияны алабыз. Ошондуктан 10.3 – теореманын шарттарын аткарылышын талап кылбай эле

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y^2-x)\cdot 2xy - x^2y\,(-1)}{(y^2-x)^2} = \frac{xy(2y^2-x)}{(y^2-x)^2}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(y^2-x)x^2 - x^2y\cdot 2y}{(y^2-x)^2} = -\frac{x^2(x+y^2)}{(y^2-x)^2}$ жекече туундуларын табууга болот.

Б) Ушул эле жекече туундуларды $F(x,y,z) = 0$ функциясы 10.3 – теореманын шарттарын канааттандырган чекиттерде (10.25) формуласын пайдаланып,

$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ болгондо $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2xy+z}{-y^2+x} = \frac{2xy+z}{y^2-x}$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x^2-2yz}{-y^2+x} = \frac{x^2-2yz}{y^2-x}$ көрүнүштөрдө эсептөөгө болот ($z = \frac{x^2y}{y^2-x}$ маанисин койсок, жогорудагы жекече туундуларга тең болушат).

В) $F(x,y,z) = 0$ теңдемесинен түз эле x, y өзгөрүлмөлөрү боюнча биринен туунду алганда экинчисин турактуу деп эсептеп, ал эми z ти x, y өзгөрүлмөлөрүн экөөсүнө карата эки өзгөрүлмөлүү функция деп дифференцирлейли. Анда

$F'_x = (x^2y - y^2z + zx)'_x \equiv 2xy - y^2\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + z = 0$ теңдештигинен

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy+z}{y^2-x}$ жекече туундусун, ал эми

$$F'_y = (x^2y - y^2z + zx)'_y \equiv x^2 - 2yz - y^2\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

теңдештигинен $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2-2yz}{y^2-x}$ жекече туундусун таап, алардын жогорудагы жекче туундулар менен тең болорун көрөбүз.◄

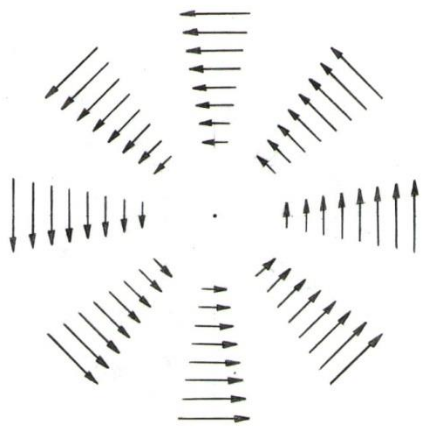
§ 10.4 Жекече туундуларды вектордук ыкмалар менен эсептөө жана түшүндүрүү

10.4.1 Вектордук жана скалярдык талаалар

Айталы, R^3 мейкиндигинде жайгашкан кандайдыр бир идиштин ичине эркин кыймылдоочу нерсе салынсын, убакыттын ар бир ирмеминде байкоо салып, нерсе идиштин кайсы бир чекитинде, $\vec{u}$ векторун багытында белгилүү бир ылдамдык менен кыймылдап жүргөнүн байкайбыз. Белгилүү бир убакыт өткөн соң, анын кыймылдуу багыттарын векторлор менен толук алмаштырдык деп ойлосок, анда идиштин ичи (G областы) векторлордун $\{\vec{u}\}-$ жыш топтун (көптүктөрүн) агымдары менен толук толтурган болот элек. Мындай учурда $\{\vec{u}\}$ векторлорун көптүгүн, каралган G областындагы (идиштеги) чекиттердин **вектордук талаасын** түзүшөт деп айтып, ал эми өзгөрүлмө $\vec{u}$ векторун өзүн – **талаанын вектору** дейбиз. Ошентип $\vec{u} \ =\{u_1;u_2;u_3\}$ вектору, $(x;y;t)$ чекитиндеги абалды байкап – баяндоочу вектор болуп, анын координаталары байкоо жүргүзүлгөн чекиттин өзгөрүшүнө жараша өзгөрүп турган, үч өзгөрүлмөдөн көз каранды болгон, үч функция сыяктуу

$u_1=u_1(x,y,t),\ u_2=u_2(x,y,t),\ u_3=u_3(x,y,t)$ эсептелишет.

Мисалы материалдык чекиттин айланасындагы күч – талаасын вектордук талаа деп эсептөөгө болот. Бул күч – талаасын бардык векторлору, Ньютондун тартылуу күчү боюнча $(F=\gamma\frac{M\cdot m}{\rho^2})$ материалдык чекитке тартылып жаткан бирдик массага ээ болгон чекиттерге багытталып, ал эми алардын модулдары материалдык чекиттен, ага тартылып жатышкан бирдик массага ээ болгон чекиттерге чейинки аралыктын квадраттарына тескери пропорцияда болушат.



10.5-чийме

Экинчи жактан, байкоо жүргүзүлүп жаткан $(x;y;t)$ өзгөрүлмө чекитин радиус – вектору $\vec{r}$ болсо, анда $\vec{u}$ векторун ушул чекиттеги абалды мүнөздөөчү $\vec{u}=\vec{u}(\vec{r})$ көрүнүштөгү вектор – функция деп эсептөөгө да болот.

Вектордук талааны үйрөнүү процессинде декарттык координаталар системасын буруу зарылчылыгы келип чыгышы мүмкүн. Мисалы бир октун айланасында турактуу бурчтук ылдамдык менен айланып жаткан катуу телонун ылдамдыктарын вектордук талаасын, бурууларды колдонбой үйрөнүү кыйын (10.5 – чийме). Буруу учурунда, вектордук талаада берилген чекиттин $\vec{r}$ радиус – вектору жана бул чекитке туура келген вектордук талаанын $\vec{u}$ вектору өзгөрбөстөн кала берип, өз ара $\vec{u}=\vec{u}(\vec{r})$ функционалдык көз карандылыктарын сактап калышат. Ошентип, векторлор өзгөрбөй координата тегиздиги айланып бурулгандыктан, вектордук талаанын $(x;y;t)$ чекитин координаталары $(x;y;t)\to(\xi;\eta;\tau)$ жаңы координаталарга ээ болушуп, ага тиешелеш талаанын векторлору да жаңы

$\vec{u}=\{u_1;u_2;u_3\}\to\{\omega_1;\omega_2;\omega_3\}$ координаталарга өтүшөт. Координаталар системасын кайсы багытка кандай бурганыбызга карабастан, алардын ортторун жардамы менен, чекиттердин жаңы жана эски (же тескерисинче) координаталарын байланыштыра алабыз (IV – гл. , §4.1 сыяктуу). Демек вектордук талааны, анын $\vec{u}$ вектору менен мүнөздөп үйрөнүү мүмкүнчүлүгү ар дайым сакталат.

- **Скалярдык талаа .**

Эгерде R^3 мейкиндигинде жайгашкан кандайдыр бир G областын ар бир $(x;y;t)$ чекитине u чоңдугунун анык бир сан мааниси туура келсе (мисалы ошол чекиттин тыгыздыгын көрсөткөн чоңдук), анда мындай көз карандылык байланышын G областынын чекиттериндеги

$u=\mathrm{f}(x,y,t)$ көрүнүштөгү **скалярдык функция** деп эсептеп, G областында **скалярдык талаа** берилди деп коёбуз. Ал эми, x,y,t өзгөрүлмөлөрүн, координата башталмасынан башталган кандайдыр бир $\vec{r}=\{x;y;t\}$ векторун координаталары деп түшүнүп, берилген функцияны вектордон көз каранды $u=\mathrm{f}(x,y,t)=F(\vec{r})$ көрүнүштөгү чоңдук деп эсептесек, анда u чоңдугун $\vec{r}$ векторуна тиешелеш коюлган, $\vec{u}=\{u_1;u_2;u_3\}$ векторун $|\vec{u}\ |=\sqrt{u_1{}^2+u_2{}^2+u_3{}^2}$ узундугу деп түшүнүүгө болот. Ошентип G областындагы $(x;y;t)$ чекитин скалярдык функциясы вектор болбостон, декарттык координаталар системасы өзгөргөндө да мурдагы чоңдугун сактап кала берген сан (скаляр) болот.

- **Скалярдык талаанын градиенти.**

10.3 Аныктама. *G областында берилген скалярдык талааны аныктаган $u = \mathfrak{f}(x, y, t)$ скалярдык функциянын градиенти деп, координаталары $\mathfrak{f}(x, y, t)$ функциясын жекече туундулары болгон*

$\vec{u} = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial x}\right\}$ *векторун айтабыз жана аны* $\vec{u} = grad\,\mathfrak{f}$ же $\nabla\mathfrak{f}$ *көрүнүштөрдө белгилейбиз.*

10.4.2 Скалярдык өзгөрүлмөлүү вектор функциянын туундусу

Аргументтери вектордук жана скалярдык талааларда өзгөрүшкөн вектордук жана скалярдык функциялар менен катар эле, аргументи бир өзгөрүлмүлүү скаляр (сан) болгон вектордук функцияларды карайлы. Айталы $\{\vec{u}\}$ векторлорунун тобу (көптүгү) бир гана t параметринен (скалярынан) көз каранды $\vec{u} = \vec{u}(t)$ векторлорунан турсун, анда

$\vec{u} = \vec{u}(t)$ скалярдык аргументтүү вектор функция деп аталат. Скалярдык аргументтүү вектор функцияны t санын өзгөрүүсүнө жараша өзгөргөн $\vec{u}$ векторун $\vec{u} = \{u_1; u_2; u_3\}$ координаталары боюнча, бир өзгөрүлмөлүү үч функциялардын системасы катарында да жазуу мүмкүн: $\begin{cases} u_1 = \varphi(t), \\ u_2 = \psi(t), \\ u_3 = \eta(t), \end{cases}$

$\alpha < t < \beta$. Эгерде $\vec{u}$ векторун мейкиндикте жайгашкан $(u_1; u_2; u_3)$ чекититин радиус – вектору катарында эсептесек, анда t параметри берилген аралыкта өзгөргөн учурда радиус – вектордун учтары мейкиндикте кандайдыр бир L ийрисин (годографын) сызган болот.

Эгерде $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ функциялары (α, β) аралыгында дифференцирленүүчү функциялар болушса, анда скалярдык аргументтүү $\vec{u} = \vec{u}(t)$ функциясын t параметри боюнча туундусун

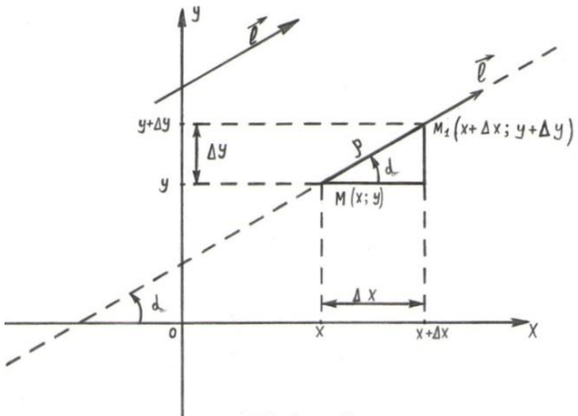
$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{u}'(t) = \{\varphi'(t); \psi'(t); \eta'(t)\} \qquad (10.26)$$

көрүнүштөгү вектор катарында табууга болот. Скалярдык аргументтүү вектор функциялардын туундуларын эсептөөдө, туунду алуунун бардык касиеттери жана эрежелери сакталат.

10.4.3 Берилген багыт боюнча туунду

Дифференцирленүүчү $u = f(x, y)$ функциясын f'_x, f'_y жекече туундулары, тиешелүү түрдө $0x, 0y$ окторун багыттары боюнча

функциянын өсүү ылдамдыктарын түшүндүрүп, ошол багыттар боюнча алынган туундулар болушат. Эгерде берилген функция дифференцирленүүчү болсо, анда анын октордун багыттары боюнча гана жекече туундулары жашабастан, туунду алынып жаткан М(x; y) чекитинен башталуучу каалагандай $\vec{l}$ багыты боюнча да туундусу жашайт. $\vec{l}$ багыты эркин тандалган чекиттен башталган болсо, аны M(x; y) *чекитине параллель которуп келдик деп элестетебиз.*



10.6-чийме

$x0y$ координаттык тегиздигиндеги ар кандай $\vec{l}$ багыты, анын $0x$ координаттык огу менен түзгөн α оң бурчу, же $\vec{l}$ багытынын бирдик $\vec{e}_{\vec{l}} = \{\cos\alpha\,, \sin\alpha\}$ вектору менен аныкталары белгилүү. Каралып жаткан M(x; y) чекитинен башталган, $\vec{l}$ менен багытташ жарым түз жүргүзөлү (10.6 – чийме). Бул жарым түздөн

$\mathrm{M}_1(x + \Delta x;\ y + \Delta y)$ чекитин алып, аны ушул жарым түздү бойлоп M чекитине умтултуп көрөлү. Анда алардын арсындагы аралык да,

$\rho(\mathrm{M}, \mathrm{M}_1) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \ \rightarrow\ 0$ нөлгө умтулуп, өз учурунда $\Delta x, \Delta y$ өсүндүлөрү бири – биринен көз карандысыз түрдө, $\begin{cases} \Delta x = \rho\cos\alpha, \\ \Delta y = \rho\sin\alpha \end{cases}$ мыйзамы боюнча нөлгө умтулуп жөнөшөт.

Аргументтин $\vec{l}$ багыты боюнча ρ аралыгына өсүүсү менен, функция да үзгүлтүксүз болгондуктан, тиешелүү козголууга же өсүндүгө ээ болот. Аны $\Delta_{\vec{l}}\, u = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ деп белгилеп, аны ρ го бөлүп, $\rho \rightarrow 0$ умтулгандагы пределге өтсөк, $u = f(x, y)$ функциясын $\vec{l}$ багыты боюнча

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\rho\cos\alpha\,, y+\rho\sin\alpha)-f(x,y)}{\rho}=D'_{\vec{l}}\ f(x,y)\ (10.27)$$

көрүнүштөгү туундусун табабыз.

Эгерде $\alpha=0$ болсо, $\vec{l}$ багыты $\mathrm{O}x$ огу менен багытташ болуп, $\vec{e}_{\vec{l}}=\vec{e}_x=\{1,\ 0\}$ же $\Delta x=\rho$, $\Delta y=0$ көрүнүштөргө келип, (10.27) ден $D'_{\vec{l}}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x$ жекече туундусуна;

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ болсо, $\vec{l}$ багыты $\mathrm{O}y$ огу менен багытташ болуп, $\vec{e}_{\vec{l}}=\vec{e}_y=\{0,\ 1\}$, $\Delta x=0$, $\Delta y=\rho$ болуп, $D'_{\vec{l}}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}=\ f'_y$ жекече туундусуна тең болорун көрөбүз.

Ал эми $\alpha=-\pi$ болсо, $\vec{e}_{\vec{l}}=\vec{e}_{-x}=\{-1,\ 0\}$ болуп,

$D'_{\vec{l}}f(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}$; $\alpha=-\frac{\pi}{2}$ болсо, $\vec{e}_{\vec{l}}=\vec{e}_{-y}=\{0,\ -1\}$ болуп, $D'_{\vec{l}}f(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial y}$ жекече туундулары келип чыгат.

Ошентип жалпы учурда, $\vec{l}$ багыты боюнча функциян өсүндүсүн

$\Delta_{\vec{l}}\,u=f(x+\Delta x, y+\Delta y)\ -\ f(x,y)=f'_x\,\Delta x+f'_y\,\Delta y+\varepsilon\cdot\rho=$

$=f'_x\cdot\rho\cos\alpha+f'_y\cdot\rho\sin\alpha+\varepsilon\cdot\rho=\rho\big(f'_x\cos\alpha+f'_y\sin\alpha+\varepsilon\big)$ деп жазып, $\vec{l}$ багыты боюнча туундуну

$$D'_{\vec{l}}f(x,y)=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta_{\vec{l}}\,u}{\rho}=\ f'_x\cos\alpha+f'_y\sin\alpha \qquad (10.28)$$

эсептөө эрежесин келтирип чыгарабыз.

Ал эми $\vec{l}$ багыты R^3 мейкиндигинде берилип, $u=f(x,y,t)$ функциясынан ушул багыт боюнча туунду алуу керек болсо, анда ал

$$D'_{\vec{l}}f(x,y,t)=f'_x\cos\alpha+f'_y\cos\beta+f'_t\cos\gamma \qquad (10.29)$$

көрүнүштө эсептелет. Мында $\alpha=0x^\wedge\vec{l}$, $\beta=Oy^\wedge\vec{l}$, $\gamma=Ou^\wedge\vec{l}$ координаттык октор менен $\vec{l}$ багытын арасындагы бурчтар,

$\vec{e}_{\vec{l}} = \{\cos\alpha\,; \cos\beta; \cos\gamma\}$ вектору $0xyu -$ координаталар системасындагы $\vec{l}$ багытын бирдик вектору.

Функциянын градиентин пайдаланып, $\vec{l}$ багыты боюнча $u = f(x,y,t)$ функциясын туундусун $\operatorname{grad} f$ жана $\vec{e}_{\vec{l}}$ бирдик векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү катарында эстеп калууга болот

$$D'_{\vec{l}} f(x,y,t) = (\operatorname{grad} f,\ \vec{e}_{\vec{l}}\,) = f'_x \cos\alpha + f'_y \cos\beta + f'_t \cos\gamma\ . \quad (10.30)$$

$\nabla -$ “Гамильтондун оператору” деп аталып, “набла” деп окулган

$\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ көрүнүштөгү (10.3 - Аныктама) оператор болуп, f ке таасир эткенде же көбөйтүлгөндө $\operatorname{grad} f \equiv \nabla f$ градиенти келип чыгат. R^2 мейкиндигинде берилген $f(x,y)$ функциясын градиенти xOy координаталар системасын $\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}$ орттору боюнча ажыратылып жазылган $\nabla f \equiv \operatorname{grad} f\ = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{\jmath}$ вектор болот.

Демек, $f(x,y,t)$ функциясын $uOxy$ координаталар системасын $\vec{\imath}\,,\vec{\jmath},\vec{k}$ орттору менен ажыратып жазылган градиенти

$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f = \ \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \vec{k}$ көрүнүштөгү вектор болуп, ал функциянын кайсыл багыт боюнча ыкчам өсүүсүн же ыкчам кемүүсүн аныктоочу аппарат болуп эсептелет. Эгерде градиенттин проекциясы салыштырмалуу чоңураак оң сан болсо, анда $\vec{l}$ багыты менен градиент багытташ болуп, градиенттин модулу $|\nabla f|$ саны, функциянын ыкчам өсүү багытындагы ылдамдыкты көрсөтөт. Ал эми градиенттин проекциясы терс сан болгону менен, анын абсалюттук чоңдугу салыштырмалуу чоңураак оң сан болсо, анда $\vec{l}$ багыты градиентке карама - каршы багытталып, градиенттин модулу функциянын тезирээк кемүү багытындагы ылдамдыгын билдирет. Ошентип функциянын градиенти: эсептелип жаткан чекиттен башталган бардык багыттарга карай, ушул функция менен моделдешкен кыймылдардын ылдамдыктарын эң чоңунан кичинесине чейин табуу мүмкүнчүлүгүн берет.

Градиентке геометриялык жактан түшүндүрмө берели. R^2 тегиздигиндеги $(x;y)$ чекитин $u = f(x,y)$ скалярдык функциясын карайлы. Анын скалярдык талаасын с – сандарын көптүгү менен аныкталган, $f(x,y) = $ с деңгээл сызыктардын тобу деп ойлойлу. Анда бул скалярдык талаада жайгашкан каалагандай Р чекити боюнча өткөн деңгээл сызыгынын багыты боюнча $f(x,y)$ функциясынан алынган туунду, же градиенттин Р чекитинен өткөн деңгээл сызыгына жүргүзүлгөн жаныма түздөгү проекциясы нөлгө барабар болот. Анткени $D_{\vec{c}}\, f(x,y) = (\mathrm{grad}\,\mathrm{f}, \vec{\mathrm{e}}_{\vec{c}}\,) = (\mathrm{f}(\mathrm{P}))'_x \cos\alpha + (\mathrm{f}(\mathrm{P}))'_y \sin\alpha =$

$= 0 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha = 0$. Мында $\mathrm{f}(\mathrm{P}) = \mathrm{c}$ турактуу сан. Ошондуктан скалярдык көбөйтүндүлөрү $(\mathrm{grad}\,\mathrm{f},\ \vec{e}_{\vec{c}}\,) = 0$ болгон векторлор сыяктуу, скалярдык талаанын каалагандай Р чекитиндеги градиент: Р чекитинен өткөн деңгээл сызыгына жүргүзүлгөн жаныма түзгө перпендикуляр же нормаль түз менен багытташ (же дал келген) вектор болот деген натыйжага келебиз (Р *чекитиндеги жанымага перпендикуляр түз, деңгээл сызыгына ушул чекиттеги нормаль болот*). Ошондой эле R^3 мейкиндигиндеги $(x;y;t)$ чекитинде скалярдык $u = f(x,y,t)$ функциясы берилсе, анын скалярдык талаасын $f(x,y,t) = $ с деңгээл сызыктарын тобу катарында карап, скалярдык талаанын кааагандай Р чекитиндеги $f(x,y,t)$ функциясын градиенти, $f(x,y,t) = $ с деңгээл бетине Р чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздикке перпендикуляр, же анын Р чекитиндеги нормаль түзүнө багытташ болгон вектор болорун көрөбүз.

§10.5 Вектордук талаанын дивергенциясы жана ротору

Чекиттин кандай гана дифференцирленүүчү скалярдык функциясы берилбесин, аны дифференцирлөөнү скалярдык функциянын градиенттери (векторлору) түзгөн вектордук талаа катарында мүнөздөдүк. Ушуга окшош эле, кандайдыр бир дифференцирлөө процессин жардамы менен вектордук талаа үчүн, чекиттин скалярдык функциясын түзөлү.

10.4 Аныктама. *G областында* $\{\vec{u}\,\}$ *векторлор тобу менен түзүлгөн вектордук талаанын,* $(x;y;t)$ *чекитиндеги* $\vec{u} = \vec{u}(x,y,t) = \{u_1;u_2;u_3\}$ *вектор – функциясын дивергенциясы деп :*

$$div\,\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \qquad (10.31)$$

көрүнүштө жазылып, белгиленген скалярдык функцияны айтабыз.

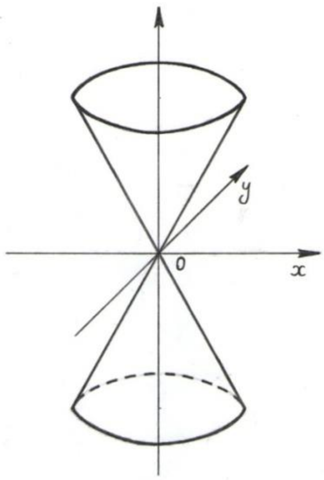
Координаталар системасын өзгөрүүсүнө карап, вектордук талаанын чекиттерин координаталары да $(x; y; t) \to (\xi; \eta; \tau)$ өзгөрүп, ага жараша талаанын векторун $\vec{u} = \{u_1; u_2; u_3\} \to \{\omega_1; \omega_2; \omega_3\}$ координаталары кошо өзгөрүп, анын дивергенциясы да

$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\omega_2}{\partial\eta} + \frac{\partial\omega_1}{\partial\tau}$ башка көрүнүштө жазылат. Бирок эски жана жаңы (же тескерисинче) координаталар системасын байланыш формулалары аркылуу

$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial t} \equiv \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial\omega_1}{\partial\xi} + \frac{\partial\omega_2}{\partial\eta} + \frac{\partial\omega_1}{\partial\tau}$ экөөсүн теңдеш экендигин далилдөөгө болот.

10.5 Аныктама. $rot\,\vec{u} = \left\{\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t}; \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_3}{\partial x}; \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right\}$ (10.32)

координаталары менен берилген вектор – функциясын, $(x; y; t)$ *чекитиндеги* $\vec{u} = \vec{u}(x, y, t) = \{u_1; u_2; u_3\}$ *вектордук талаанын ротору деп атайбыз.*



10.7-чийме

Ошентип вектордук талаанын ротору вектор болуп, анын координаталары декарттык координаталардын өзгөрүүсүнө карап, ар башка болот.

Гамильтондун $\nabla = \left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ операторун жардамы менен $\vec{u}$ векторун (10.31) дивергенциясын, ∇ жана $\vec{u}$ векторлорун скалярдык көбөйтүндүсү катарында жазууга болот $\operatorname{div} \vec{u} = (\nabla, \vec{u})$. Ал эми (10.32) роторун бул эки вектордун вектордук көбөйтүндүсү $rot\,\vec{u} = [\nabla, \vec{u}]$ катарында жаза алабыз.

§10.6 Жаныма тегиздик жана бетке түшүрүлгөн нормаль. Толук дифференциалдын геометриялык мааниси

∘ Айталы $F(x, y, u) = 0$ теңдемеси менен кандайдыр бир S бети берилсин, анда бул бетте жайгашкан $P(x; y; u)$ чекиттерин, беттин *кадимкидей* жана *өзгөчө* чекиттери деп экиге бөлөбүз.

10.6 Аныктама. *Эгерде S бетинде жайгашкан* $\mathrm{P}(x; y; u)$ *чекитинде* $\frac{\partial F}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial u}$ *үзгүлтүксүз жекече туундулары жашап, алардын ичинен жок дегенде бирөөсү нөлдөн айырмалуу болсо, анда аны S бетин* ***кадимкидей*** *чекити деп, ал эми үч* $\frac{\partial F}{\partial x}, \ \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial u}$ *жекече туундуларын баары тең* $\mathrm{M}(x; y; u)$ чекитинде *нөл болуп калса, же болбосо жок дегенде бирөөсү жашабай* калса, анда аны S бетин ***өзгөчө*** *чекити деп айтабыз.*

Мисалы $x^2 + y^2 - u^2 = 0$ теңдемеси менен конустук бет берилген (10.7 – чийме). Бул конустук бет бир гана O(0;0;0) өзгөчө чекитине ээ болуп, калган бардык чекиттери кадимкидей чекиттер болушат. Чынында эле конустук беттин теңдемесин $F(x, y, u) = 0$ көрүнүштөгү айкын эмес функция деп алып, анын жекече туундуларын эсептесек $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \ \ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \ \ \frac{\partial F}{\partial u} = -2u$ келип чыгып, алардын бардыгы O(0;0;0) чекитинде гана нөлгө барабар болоруна ишенебиз.

- R^3 мейкиндигинде $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ u = \eta(t), \end{cases} \quad \alpha < t < \beta$ параметрдик теңдемеси

менен берилген L ийрисин карайлы. Айталы, көрсөтүлгөн аралыкта үзгүлтүксүз $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\eta'(t)$ туундулары жашап, алардын баары бир убакта нөлгө барабар болуп калбасын дейли

$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\eta'(t))^2 \neq 0$, б.а. L ийрисинде өзгөчө чекиттер жок болсун. L ийрисинде параметрдин $t_0 \in (\alpha, \beta)$ маанисине туура келген $\mathrm{P}_0(x_0; y_0; u_0)$ кадимкидей чекити берилсин. Анда L ийрисине P_0 чекитинен жүргүзүлгөн жаныма вектор

$\vec{\tau} = \varphi'(t_0) \cdot \vec{\imath} + \psi'(t_0) \cdot \vec{\jmath} + \eta'(t_0) \cdot \vec{k}$ же $\vec{\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{\imath} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{\jmath} + \frac{du}{dt} \cdot \vec{k}$

көрүнүштөрдө болот ($\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt} -$ туундулары t_0 чекитинде деп алынган).

- **Бетке жаныма тегиздик жана нормаль.**

Айталы $F(x, y, u) = 0$ теңдемеси менен кандайдыр бир S бети берилсин. Анын бетинен бир P кадимкидей чекитти алып, P чекитинен өтүүчү, S бетинде жаткан L ийрисин жүргүзөлү. Бул ийринин параметрдик

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \ (\alpha < t < \beta) \\ u = \eta(t) \end{cases} \qquad (10.33)$$

теңдемеси берилип, өзгөчө чекиттери жок болсун. Бетке жүргүзүлгөн жаныма түз сызыктын аныктамасы боюнча, P чекитинен L ийрисине жүргүзүлгөн жаныма $\mathrm{T_L}$ түзү, S бетине да жаныма түз болот.

(10.33) маанилери беттин теңдемесин $F\big(\varphi(t), \psi(t), \eta(t)\big) \equiv 0,\ t \in (\alpha, \beta)$ канааттандырууга тийиш, анткени ийриде жатат. Бул теңдештикти татаал функция сыяктуу t өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирлеп,

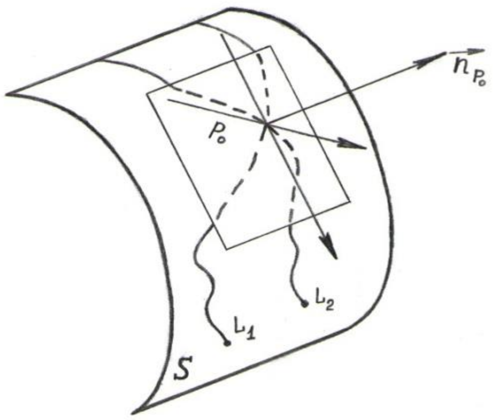
$\frac{\partial F}{\partial t} \equiv \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} = 0$ барабардыгына ээ болобуз. Анын сол жагында

$\vec{n} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \vec{\imath} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \vec{\jmath} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \vec{k}$ вектору менен $\vec{\tau} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{\imath} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{\jmath} + \frac{du}{dt} \cdot \vec{k}$ векторунун скалярдык $(\vec{n}, \vec{\tau})$ көбөйтүндүсү турганын көрөбүз. Демек, ал барабардыкты $(\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$ деп жаза алабыз. P чекитинде $\vec{\tau}$ вектору L ийрисине ушул чекиттеги жаныма боюнча багытталса, $\vec{n}$ вектору P чекититин координаталарынан жана $F(x, y, u)$ функциясын көрүнүшүнөн (жекече туундуларынан) көз каранды болуп, P чекитинен өтүүчү L ийрисинен көз каранды болбойт.

P чекити S бетинин кадимкидей чекити болгондуктан, бул чекитте $F(x, y, u)$ функциясын жок дегенде бир нөлдөн айырмалуу жекече туундулары жашагандыктан, $\vec{n}$ векторун узундугу нөлдөн

$|\vec{n}| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)^2} \neq 0$ айырмалуу болот. Ошондуктан $(\vec{n}, \vec{\tau}) = 0$ скалярдык көбөйтүндүсүн нөлгө барабар болушу, L ийрисине P чекитинен жүргүзүлгөн $\vec{\tau}$ жаныма векторун, $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр болуусу менен түшүндүрүлөт. Мындан S бетине P чекитинен жүргүзүлгөн бардык жаныма түздөр жаткан тегиздик да $\vec{n}$ векторуна перпендикуляр болору келип чыгат.

10.7 Аныктама. *S бетинде жайгашкан кадимкидей* P_0 *чекитинен S бетине жүргүзүлгөн бардык жаныма түздөр жаткан S тегиздигинин бетине,* P_0 *чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздик деп, ал эми жаныма тегиздикке* P_0 *чекитинде жүргүзүлгөн* $\vec{n}_\text{P}$ *перпендикуляр вектору, S бетине* P_0 *чекитинде жүргүзүлгөн нормалдык вектор деп аталышат (10.8 - чийме).* P_0 *чекитинен өтүүчү,* $\vec{n}_\text{P}$ *векторуна багытташ түздү, S бетинин нормалы дейбиз.*



10.8-чийме

$F(x, y, u) = 0$ теңдемеси мнен берилген S бетинин $\text{P}_0(x_0; y_0; u_0)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздикке, ушул чекитте жүргүзүлгөн перпендикуляр вектор же нормалдык вектор координаталары менен

$$\vec{n}_{\text{P}_0} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \vec{k} \,\Big|_{(x_0; y_0; u_0)} \quad \text{же}$$

$$\vec{n}_{\text{P}_0} = \left\{F'_x(\text{P}_0); F'_y(\text{P}_0); F'_u(\text{P}_0)\right\} \qquad (10.34)$$

көрүнүштөрдө жазылары жогорудагы талкуулоолордон келип чыгат.

S бетинде берилген $\text{P}_0(x_0; y_0; u_0)$ чекити аркылуу өтүп, берилген $\vec{n}_{\text{P}_0}$ векторуна перпедикуляр болгон тегиздик катары (III – гл. , §3.2), жаныма тегиздиктин теңдемесин

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{\text{P}_0(x_0; y_0; u_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{\text{P}_0(x_0; y_0; u_0)} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{\text{P}_0(x_0; y_0; u_0)} \cdot (u - u_0) = 0$$

көрүнүштө жаза алабыз.

Эгерде S бети айкын түрдөгү $u = f(x, y)$ функциясы менен берилсе, анда аны $F(x, y, u) \equiv f(x, y) - u = 0$ көрүнүштөгү айкын эмес функция катарында эсептеп, жекече туундуларын табайлы, анда

$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial u} = (f(x,y) - u)'_u = 0 - 1 = -1$ келип чыгып, $\text{Р}_0(x_0; y_0; u_0)$, (Мында $u_0 = f(x_0, y_0)$) чекити аркылуу өткөн S бетине жаныма тегиздиктин теңдемеси

$$u - u_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)} \cdot (y - y_0) \qquad (10.35)$$

көрүнүшкө келет.

(10.34) нормалдык векторго багытташ болуп, $\text{Р}_0(x_0; y_0; u_0)$ чекитинен өткөн түз катары, S бетине нормаль түздүн теңдемеси (III – гл. , §3.3)

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\text{Р}_0(x_0;y_0;u_0)}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\text{Р}_0(x_0;y_0;u_0)}} = \frac{u - u_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\text{Р}_0(x_0;y_0;u_0)}} \qquad (10.36)$$

көрүнүштө жазылат. Эгерде S бети айкын $u = f(x, y)$ функциясы менен берилсе, анда $\text{Р}_0(x_0; y_0; u_0)$ чекитинен берилген бетке жүргүзүлгөн нормаль түздүн теңдемеси

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)}} = \frac{u - u_0}{-1}, \qquad (10.37)$$

абалына келет (Мында $u_0 = f(x_0, y_0)$) .

Мисалы 1) $F(x, y, z) \equiv \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ айкын эмес көрүнүштөгү теңдемеси менен эллипсоид бети берилсе, анын бетиндеги $\text{Р}_0(3; 5; 2)$ чекитинен эллипсоид бетине жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин жана нормаль түздүн теңдемелерин түзөлү. Анын жекече туундуларын $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{9}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{25}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{4}$ таап, $\text{Р}_0(3; 5; 2)$ чекитиндеги маанилерин эсептейли :

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\text{Р}_0(3;5;2)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\text{Р}_0(3;5;2)} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{\text{Р}_0(3;5;2)} = \frac{4}{4} = 1 .$$

Анда элипсоиддин бетине $\text{Р}_0(3; 5; 2)$ чекитинен жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин теңдемеси

$\frac{2}{3}(x - 3) + \frac{2}{5}(y - 5) + z - 2 = 0$, ал эми нормаль түздүн теңдемеси

$\frac{x-3}{\frac{2}{3}} = \frac{y-5}{\frac{2}{5}} = \frac{z-2}{1} \equiv t$ же $\begin{cases} x = 3 + \frac{2}{3}t\,, \\ y = 5 + \frac{2}{5}t\,, \\ z = 2 + \ t\,, \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$ параметрдик теңдемеси менен берилет.

2) $z = x^2 + y^2$ $(F(x,y,z) \equiv z - x^2 + y^2 = 0)$ параболидин чокусу болгон O(0;0;0) чекитинен параболоиддин бетине жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин жана нормаль түздүн теңдемелерин көрсөтөлү. Бул учурда S бети айкын $z = f(x,y)$ функциясы менен берилгендиктен, (10.35), (10.37) формулаларды пайдаланабыз. Жекече туундулардын (0;0) чекитиндеги маанилерин

$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(x_0;y_0)} = 2x_0 = 2\cdot 0 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x_0;y_0)} = 2y_0 = 2\cdot 0 = 0$ таап, (10.35) ден

$z - 0 = 0\cdot(x-0) + 0\cdot(y-0)$ же $z = 0 -$ жаныма тегиздиктин (xOy - коородинаттык тегиздиги), ал эми (10.37) ден $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$ же $\begin{cases} x = 0\,, \\ y = 0 \end{cases}$ нормаль түздүнүн (Oz – огунун) теңдемелерин алабыз.

3) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 16$ параболасына M(1; 1) чекитинде жүргүзүлгөн жаныманын жана нормалдын теңдемесин түзөлү. Параболанын теңдемеси айкын эмес

$F(x,y) \equiv \sqrt{x} + \sqrt{y} - 16 = 0$ көрүнүштө берилди деп ойлоп, берилген чекиттеги F'_x , F'_y жекече туундуларын табабыз

$F'_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $F'_x(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$; $F'_y(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $F'_y(1,1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$.

Тегиздикте жайгашкан $F(x,y) = 0$ ийрисине жүргүзүлгөн жаныма түздүн теңдемеси (R^2 мейкиндигинде жаныма тегиздик болбой түз болот), жаныма тегиздиктин Oxy координаттык тегиздиги $(u = 0)$ менен кесилиш түзү сыяктуу

$\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{M(x_0;y_0)} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{M(x_0;y_0)} \cdot (y - y_0) = 0$ же

$F'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = 0$ көрүнүштөрдө жазылып, биздин учурда жаныма түз $\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) = 0$ же $x + y = 2$ теңдемесине ээ болот.

(10.36) формуласын пайдаланып, $F(x, y) = 0$ ийрисине $\mathrm{M}(x_0; y_0)$ чекитинде жүргүзүлгөн нормаль түздүн теңдемеси

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\mathrm{M}(x_0;y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\mathrm{M}(x_0;y_0)}} \quad \text{же} \quad \frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} \quad \text{же}$$

$F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ болорун билип, биздин учурдагы нормаль түздүн $\frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) = 0$ же $y = x$ теңдемесин алабыз.

- **Толук дифференциалдын геометриялык мааниси**

Эгерде жаныма тегиздиктин (10.35) формуласына $x - x_0 = \Delta x$,

$y - y_0 = \Delta y$ белгилөөлөрүн киргизсек, анда ал

$u - u_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)} \cdot \Delta y$ көрүнүшкө келип, анын оң жагы $u = f(x, y)$ функциясын $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги толук дифференциалын элестетет. Чынында эле $du = u - u_0$, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ белгилөөлөрүн киргизип, аны бул функциянын

$du = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$ толук дифференциалы көрүнүштө жазууга болот. Мындан эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x, y)$ функциясынын $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги Δx, Δy өсүндүлөрүнө тиешелүү болгон толук дифференциалы: аргументтер $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинен

$\mathrm{M}(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ чекитине которулган кезде, $\mathrm{P}_0(x_0; y_0; f(x_0, y_0))$ чекитинен функциянын графигине (S бетине) жүргүзүлгөн жаныма тегиздиктин, $\mathrm{O}u$ аппликата огу боюнча $u - u_0 = \Delta u = h$ жогорулоо (төмөндөө) бийиктиги болорун көрөбүз.

§10.7 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын жогорку тартиптеги туундулары жана дифференциалдары

10.7.1 Жогорку тартиптеги туундуларды эсептөө эрежелери

Айталы, $u = f(x, y)$ эки өзгөрүлмөлүү функциясы R^2 тегиздигин D областындагы бардык $(x; y)$ чекиттеринде

$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y)$ жекече туундулары жашап, алар да эки же андан аз өзгөрүлмөлүү функциялар болушсун. Анда бул жекече туундулар болушкан функциялар да D областынын бардык же айрым чекиттеринде жекече туундуларды эсептөө эрежелерин канааттандырып, жекече туундуларга ээ болушу мүмкүн. Эгерде чынында эле $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ функцияларынан алынган жекече туундулар жашашса, анда алар $u = f(x, y)$ функциясынан алынган **экинчи тартиптеги жекече туундулар** деп аталышат. Бул учурда берилген функциянын экинчи тартиптеги төрт жекече туундулары болушу мүмкүн, анткени $\frac{\partial u}{\partial x}$ жана $\frac{\partial u}{\partial y}$ функциялары да эки өзгөрүлмөлүү функциялар катарында x жана y өзгөрүлмөлөрү боюнча ар башка жекче туундулар алынат. Аларды төмөндөгүдөй ырааттуулукта эсептеп

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ же } f''_{xx}, \text{ же } u_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \text{ же } f''_{xy}, \text{ же } u_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \text{ же } f''_{yx}, \text{ же } u_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ же } f''_{yy}, \text{ же } u_{yy} \quad (10.38)$$

көрүнүштөрдө белгилейбиз. f''_{xy} , $f''_{yx}-$ аралаш туундулар деп аталышып, алар бири - биринен туунду алуу кезектери менен айырмаланып турушат. Биринчисинде оболу x, андан кийин y өзгөрүлмөсү боюнча туунду алынса, экинчисинде оболу y, андан кийин x өзгөрүлмөсү боюнча туунду алынган.

Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүү менен үчүнчү же андан да жогорку тартиптеги жекече туундуларды алууга болот. Мисалы

$u = x^2y^3 + xy$ функциясын үчүнчү тартиптеги жекче туундуларына чейин эсептейли : 1) $u_x = 2x \cdot y^3 + y,\ \ u_y = 3x^2y^2 + x$;

2) $u_{xx} = 2y^3$, $u_{xy} = 6xy^2 + 1$, $u_{yx} = 6xy^2 + 1$, $u_{yy} = 6x^2y$;

3) $u_{xxx} = 0$, $u_{xxy} = 6y^2$, $u_{xyx} = 6y^2$, $u_{xyy} = 12xy$, $u_{yxx} = 6y^2$, $u_{yxy} = 12xy$, $u_{yyx} = 12xy$, $u_{yyy} = 6x^2$.

Берилген мисалда экинчи тартиптеги $u_{xy} = 6xy^2 + 1$ жана $u_{yx} = 6xy^2 + 1$ аралаш туундулары барабар экендигине күбө болдук. Бирок мындай теңдештик ар дайым эле орун ала бербейт.

10.4 Теорема (Аралаш туундулардын барабардыгы жөнүндөгү).

Эгерде $u = f(x,y)$ *функциясынын кайсы бир* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитин жакынкы чеке белинде* f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} *жекече жана аралаш туундулары жашашып, экинчи тартиптеги* f''_{xy}, f''_{yx} *аралаш туундулары* M_0 *чекитинде үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинде бул аралаш туундулар*

$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ *барабар болушат.*

Теореманы далилдөөсүз кабыл алып, практикалык эсептөөлөрдө колдонуу менен, чекиттеги аралаш туундулардын барабар болуусунун **негизги шарты** – ошол чекитте алардын үзгүлтүксүз функциялар болушу эсептелерин баса белгилеп кетебиз. Мисалы

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{эгерде } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 \ \text{эгерде} & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

функциясын x боюнча жекече туундусу

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} y \cdot \left[\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right] & \text{эгерде } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 \ \text{эгерде} & x = 0, \ y = 0 \end{cases}$$

көрүнүштө табылып, $x = 0$ десек (бул жекече туундунун $0y$ огундагы проекциясы), анда y өзгөрүлмөсүн каалагандай маанилеринде (анын ичинде $y = 0$ болгондо да) $f'_x(0,y) = -y$ көрүнүштөгү функция болорун көрөбүз. Анын экинчи тартиптеги аралаш туундусун $f''_{xy}(0,y) = -1$ эсептеп, O(0;0) чекитинде $f''_{xy}(0,0) = -1$ болорун көрөбүз.

Ушундай эле талкуулоолорду $f'_y(x,y)$ функциясы үчүн жүргүзүп, $y=0$ деп, экинчи тартиптеги аралаш туундусун $f''_{yx}(x,0)=1$ эсептеп, анын O(0;0) чекитиндеги $f''_{yx}(0,0)=1$ маанисин табабыз. Мындан O(0;0) чекитинде экинчи тартиптеги аралаш туундулардын

$f''_{xy}(0,0)=-1\neq f''_{yx}(0,0)=1$ барабар эмес экендигин көрөбүз. Анын себеби, алардын O(0;0) чекитинде үзүлүшкө ээ болгон функциялар болгондугунда экендигине күбө болобуз.

Каралуучу $u=x^2y^3+xy$ мисалынан көрүнгөндөй, туунду алуу кезектери эрте же кеч келгенине карабай, үчүнчү тартиптеги $u_{xxy}=u_{xyx}=u_{yxx}=6y^2$, $u_{xyy}=u_{yxy}=u_{yyx}=12xy$ аралаш туундуларын өз ара барабар экендигин жана алардын бардыгын R^2 тегиздигинде үзгүлтүксүз функциялар экендигин байкайбыз.

Ошентип, жалпы n өзгөрүлмөлүү $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ функциясында $m-$ тартиптеги аралаш туундулар $(m\geq 2)$, бири – биринен туунду алуу кезектери боюнча гана айырмаланышкан үзгүлтүксүз функциялар болушса, анда алар барабар маанилерге ээ болот деген жыйынтыкка келебиз.

10.7.2 Жогорку тартиптеги дифференциалдар. Туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги

R^2 тегиздигиндеги xOy декарттык кординаталар системасында берилген D областында $u=f(x,y)$ функциясы аныкталсын (берилсин). Эгерде бул функция D областынын ар бир $(x;y)$ чекитинде дифференцирленүүчү болсо, анда анын бул чекиттеги дифференциалын

$du=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy$ көрүнүштө жаза аларыбыз белгилүү. Бул жерде $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ тер $(x;y)$ чекитиндеги эркин козголууну түшүндүргөн өсүндүлөр болгондуктан, аларды x,y өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болбогон жетишерлик кичине турактуу сан катары кабыл алса болот. Ошентип, бир саамга du толук дифференциалын x,y өзгөрүлмөлөрүнөн гана көз каранды функция катары элестетсек, анда кайсы бир шарттарда ал да дифференцирленүүчү функция болуп калышы мүмкүн деген ойго келебиз.

∘**10.8 Аныктама.** *Эерде* $u = f(x, y)$ *функциясын толук дифференциалы болгон* $du = df(x, y)$ *функциясы,* $(x; y)$ *чекитинде дифференцирленүүчү функция болуп, аны да эки өзгөрүлмөлүү функция сыяктуу ушул чекиттеги толук дифференциалын табуу мүмкүн болсо жана бул процессти аткаруу мезгилинде* $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ *мурдагы калыбында сакталса, анда* $du = df(x, y)$ *функциясынын* $(x; y)$ *чекитиндеги толук диффренциалы,* $u = f(x, y)$ *функциясын ушул чекиттеги экинчи тартиптеги дифференциалы деп аталып,*

$$d^2u = d\,(du) \qquad (10.39)$$

символу менен белгиленет.

Айталы $u = f(x, y)$ функциясын D областында биринчи жана экинчи тартиптеги жекече туундулары жашап, алар да ушул областта эки өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Анда берилген функциянын $du = df(x, y)$ толук дифференциалы да дифференцирленүүчү функция болуп, $f(x, y)$ тин (10.39) көрүнүштө белгиленген, экинчи тартиптеги d^2u дифференциалы жашайт. dx , dy турактуу экендигин эске алып d^2u ну эсептейли:

$$d^2u = d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy\right) =$$

$= d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)dy$. Мындагы $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ функцияларынын толук дифференциалдарын өз өзүнчө эсептеп:

$$d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dy \equiv u_{xx}dx + u_{xy}dy,$$

$$d\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy \equiv u_{yx}dx + u_{yy}dy$$

эстеп калуу үчүн ар түрдүү белгиленииштерде жазалы. Алардын маанилерин орундарына коюп

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(dy)^2 ,\ \text{же}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ аралаш туундулардын (үзгүлтүксүз функциялар) барабар экендигин эске алып, экинчи тартиптеги дифференциалды расмий түрдө

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 \qquad (10.40)$$

көрүнүштө жаза алабыз. Мында $dx \cdot dx = (dx)^2 = dx^2$, $dy \cdot dy = (dy)^2 = dy^2$ деп жазылышты. (10.40) эрежесин жакшы эстеп калуу үчүн $d^2u = u_{xx}dx^2 + 2\,u_{xy}dxdy + u_{yy}dy^2$ көрүнүштө же $\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$ белгилөөсүн эки сандардын суммасы сыяктуу элестетип, эки сандын суммасын квадратка көтөрүү формуласын

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 dx^2 + 2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}dxdy + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 dy^2$$

көрүнүштөгү оператор катарында пайдаланып, бул операторго u функциясын көбөйткөндө (10.40) эрежеси келип чыгат

$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot u$ деп элестетсек болот.

$u = f(x, y)$ функциясын 3 – чү тартиптеги дифференциалы

$$d^3u = d(d^2u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 \cdot u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3 dx^3 + 3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial y}\, dx^2dy +$$

$$+ 3\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\, dy^2dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 dy^3$$ же

$$d^3u = u_{xxx}dx^3 + 3\,u_{xx}u_y dx^2dy + 3\,u_{yy}u_x dy^2dx + u_{yyy}dy^3$$

формуласы менен эсептелерин текшерип көрүүгө болот. Ушундай процессти улантуу менен, математикалык индукция усулуна таянып, берилген функциянын $n -$ тартиптеги дифференциалын

$$d^nu = d(d^{n-1}u) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n \cdot u \qquad (10.41)$$

көрүнүштө эсептөөчү формулага ээ болобуз. Мында

$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{(n)}$ деп, $n -$тартиптеги туунду белгиленет.

Жалпы n өзгөрүлмөлүү $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын $k -$ тартиптеги дифференциалын эсептөөчү формула (10.41) дин жалпыланышы катары эсептелип,

$$d^ky = d(d^{k-1}y) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k \cdot y$$

көрүнүштө болот.

- **Инварианттулуктун бузулушу.**

Эгерде $u = f(x, y)$ функциясын аргументтери x, y өзгөрүлмөлөрү да $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$ сыяктуу башка ξ, η өзгөрүлмөлөрүнөн көз каранды болгон татаал функция болсо, анда жогорку тартиптеги дифференциалдардын (10.41) көрүнүшү сакталбайт же бир өзгөрүлмөлүү татаал функциялардай эле, көп өзгөрүлмөлүү татаал функцияларда да, жогорку тартиптеги дифференциалдардын инварианттуулугу бузулат. Чынында эле бул учурда dx менен dy дифференциалдарын турактуу сандар сыяктуу көбөйтүп, же туундунун сыртына чыгарып сала албайбыз, анткени алар да $dx = d\varphi(\xi, \eta)$, $dy = d\psi(\xi, \eta)$ көрүнүштөрдөгү эки өзгөрүлмөлүү функциялар болушуп, алардын биринчи тартиптеги дифференциалдары өзүнчө $dx = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta$, $dy = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta$,

ал эми экинчи тартиптеги дифференциалдары өзүнчө (10.40) сыяктуу

$d(dx) = d^2x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} d\xi^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} d\eta^2,$

$d(dy) = d^2y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} d\xi^2 + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} d\eta^2$ көрүнүштөрдө эсептелишет.

Ошондуктан $u = f(x, y)$ функциясын биринчи тартиптеги дифференциалы

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} d\eta\right) + \frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} d\eta\right) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

көрүнүштө жазылып ивариантуулук сакталганы менен, экиден жогорку тартиптердеги дифференциалдарын жазып көрүп

$$d^2u = d\,(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial u}{\partial x} d(dx) + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y} d(dy) = \underbrace{d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy} + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} d(dx) + \frac{\partial u}{\partial y} d(dy)} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 \cdot u \; + \; \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}d^2y}_{\text{ашыкча}} \quad , \quad \text{анын жалпы} \quad (10.41)$$

көрүнүштө жазылышына экинчи кошулуучу тоскоолдук кыларын көрөбүз.

∘Туундулары менен кошо үзгүлтүксүз функциялардын мейкиндиги.

10.9 Аныктама. *Кандайдыр бир X областында*

$(x \in X \subseteq \mathrm{R}^{\mathrm{n}},\ x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *функциясын* $n-$ *тартипеги жана ага чейинки бардык жекече туундулары жашап, алардын бардыгы X областында үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Берилген областта өзүнүн* $k-$*тартиптеги туундулары менен кошо үзгүлтүксүз болгон бардык* $\{f(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \mathrm{g}(x_1, x_2, \dots, x_n),\ \dots\}$ *сыяктуу функциялардын көптүгүндө, эки функциялардын арасындагы аралыкты ченөөчү*

$$\rho(f, \mathrm{g}) = \max_{1 \le i,j \le n, x \in X} \left\{ |f - \mathrm{g}|, |f'_{x_i} - g'_{x_i}|, \dots, \left| f^{(k)}_{\underbrace{x_i \dots x_j}_{n \text{ жолу}}} - \mathrm{g}^{(k)}_{\underbrace{x_i \dots x_j}_{n \text{ жолу}}} \right| \right\} \qquad (10.42)$$

эрежени же метриканы киргизип, мындай функциялардын көптүгүн (10.42) аралык эрежесине карата метрикалык мейкиндик деп айтабыз. Түзүлгөн метрикалык мейкиндикти X ачык область болсо $\mathrm{C}^k(\mathrm{X})$ *, ал эми туюк область болсо* $\mathrm{C}^k[\mathrm{X}]$ *көрүнүштөрүндө белгилейбиз.*

Киргизилген (10.42) аралыкты ченөө эрежеси метриканын үч аксиомаларын (Гл. I, §1.2) тең канааттандырарын текшерип көрүүгө болот. Ошентип чөйрө таануу процесстеринде (10.42) метриканын жардамы менен, $\mathrm{C}^k(\mathrm{X})$ мейкиндигин элементтери болгон функцияларды сандарга окшотуп практикалык ченөө же баалоо иштеринде колдонуу мүмкүнчүлүгүн түзөбүз.

Мисалы, $D = \{(x; y) |\ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; (x; y) \in R\}$ төрт бурчтугунда аныкталган $u = x^2 + y^2$, $z = x^2 + y^2 + 4$ функциялары $\mathrm{C}^2[D]$ мейкиндигине таандык болушат. Анткени, бул төрт бурчтуктун чекиттеринде берилген функциялардын өздөрү жана экинчи тартипке чейинки бардык жекече туундулары

$u_x = 2x$; $u_{xx} = 2$; $u_{xy} = u_{yx} = 0$; $u_y = 2y$; $u_{yy} = 2$; $z_x = 2x$; $z_{xx} = 2$; $z_{xy} = z_{yx} = 0$; $z_y = 2y$; $z_{yy} = 2$ үзгүлтүксүз функциялар болушат. Ошондуктан алардын арасындагы аралыкты, бул мейкиндиктеги (10.42) аралыкты ченөө эрежесин пайдаланып,

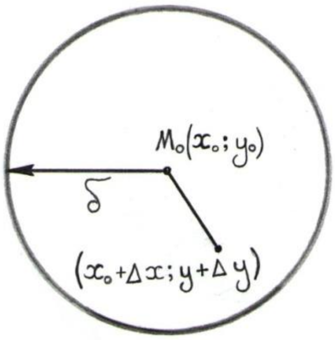
$$\rho(u,z) = \max_{(x;y)\in D}\{|u-z|, |u_x - z_x|, |u_{xy} - z_{xy}|, |u_y - z_y|, |u_{yy} - z_{yy}|\} =$$

$$= max\,\{4\,, 0, 0, 0, 0\} = 4$$

санына барабар болорун көрөбүз. Каралган мисал өтө жеңил формада (10.42) метрикасын элестетип түшүнүүгө жардам берет. Башка учурларда метриканы табуу үчүн, абсалюттук чоңдук ичиндеги ар бир айырмаларды эки өзгөрүлмөлүү функция катарында карап, алардын максималдык маанилерин аныктап салыштырабыз.

§10.8 Көп өзгөрүлмөлүү функцияларды Тейлордун көп мүчөсүнө ажыратуу

Айталы $M_0(x_0; y_0)$ чекитине жетишерлик жакын $\delta -$ аймактын бардык $(x; y)$ чекиттеринде $u = f(x, y)$ функциясын $n -$ тартиптеги жана ага чейинки бардык жекече туундулары жашап, үзгүлтүксүз функциялар болушсун. Ушул аймактын ичинен $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ чекитин алып (10.9 – чийме), M_0 чекитинен $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ чекитине чейинки аралыкта өзгөргөн $(x; y)$ чекиттерине карата



10.9-чийме

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x, \\ y = y_0 + t\Delta y \end{cases} \qquad (10.43)$$

жаңы t өзгөрүлмөсүн киргизип, берилген функцияны $t \in [0,\ 1]$ аралыгында $u = f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = \varphi(t)$

көрүнүштү бир өзгөрүлмөлүү функция катарында жаза алабыз. Бул учурда u чоңдугун t өзгөрүлмөсүнө карата татаал функция болорун көрөбүз. Шарт боюнча M_0 чекитин $\delta -$ аймагында $u = \varphi(t)$ функциясын $n -$ тартипке чейинки бардык туундулары жашайт, анда аны $t = 0$ чекитинде t нын даражалары (иш жүзүндө $u =$

$f(x,y)$ ти $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинде) боюнча Маклерондун (Тейлордун) көп мүчөсүнө ажыратууга болот:

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}t+\frac{\varphi''(0)}{2!}t^2+\ \dots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\frac{\varphi^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n\ ,0<\theta<1.$$

Мындан $t=1$ десек,

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\frac{\varphi'(0)}{1!}+\frac{\varphi''(0)}{2!}+\ \dots+\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{\varphi^{(n)}(\theta t)}{n!}\ ,0<\theta<1 \quad (10.44)$$

келип чыгат. $u=f(x,y)$ функциясын x,y аргументтери (10.43) көрүнүштөгү функциялар болгондугуна карабастан ($\Delta x,\Delta y$ өсүндүлөрү өзгөрбөс сан катары эсептелет), туруктуу

$dx=\Delta x dt\ ,dy=\Delta y dt$ дифференциалдарына ээ болгондуктан, жогорку тартиптеги дифференциалдарын эсептөөдө инварианттуулук сакталып, (10.41) формуласын пайдалана алабыз. (10.44) теңдештигин сол жагындагы чоңдукту $f(x,y)$ функциясына карата кайра жазып чыгуу үчүн, анын

$t=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0 \end{cases}$ чекитиндеги $n-$тартипке чейинки дифференциалдарын эсептеп чыгабыз. (10.41) дин негизинде, $f(x,y)$ тин $\mathrm{p}-$ тартиптеги дифференциалын

$$d^{\mathrm{p}}u=d(d^{\mathrm{p}-1}u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y),\ \ 0\le \mathrm{p}\le n \ \text{ же}$$

$$d^{\mathrm{p}}u=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x dt\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y dt\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)\cdot(dt)^{\mathrm{p}},$$

көрүнүштө жазууга болот. Анын эки жагын тең $(dt)^{\mathrm{p}}$ ге бөлүп жиберсек,

$$\frac{d^{\mathrm{p}}u}{dt^{\mathrm{p}}}\equiv\varphi^{(\mathrm{p})}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)$$

келип чыгат ($(dt)^{\mathrm{p}}=dt^{\mathrm{p}}$). Мындан $t=0$ болгондо,

$$\varphi^{(\mathrm{p})}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x\ +\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{\mathrm{p}}\cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} \quad (\mathrm{p}=0,1,2,\dots,n-1), (10.45)$$

$t=\theta$ болгондо,

$$\varphi^{(n)}(\theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x, \\ y=y_0+\theta\Delta y}}, \qquad (10.46)$$

$t = 1$ болгондо,

$$\varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \qquad (10.47)$$

барабардыктарына ээ болобуз. Бул (10.45), (10.46), (10.47) барабардыктардын жардамы менен туюнтулган $\varphi^{(\mathrm{p})}(0)$, $\varphi^{(n)}(\theta)$, $\varphi(1)$ маанилерин (10.44) кө коюп,

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n-1} \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x, \\ y=y_0+\theta\Delta y}}, \quad 0 < \theta < 1 \qquad (10.48)$$

эки өзгөрүлмөлүү $u = f(x,y)$ функциясы үчүн Маклерондун (Тейлордун) формуласы деп аталуучу (10.48) ажыралышка ээ болобуз. Бул ажыралышта акыркы кошулуучу

$R_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n \cdot f(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x, \\ y=y_0+\theta\Delta y}}$ – ажыралыштын n - тартиптеги Лагранж тибиндеги калдык мүчөсү деп аталып, ал чексиз кичине чоңдук болгон учурда гана Тейлордун (10.48) формуласы орун алат дейбиз. Ал эми (10.48) формуласында

$x_0 = y_0 = 0$, $\Delta x = x - x_0 = x$, $\Delta y = y - y_0 = y$ маанилери коюлса, анда аны Маклорендин формуласы деп, Тейлордун формуласын $M_0(0;0)$ чекитиндеги бир жекече учуру катарында карашат.

(10.48) барабардыгын оң жагындагы $f(x_0, y_0)$ дү сол жагына өткөрүп, келип чыккан айырманы

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \quad \Delta f|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}}$ көрүнүштө белгилеп, Тейлордун (10.48) формуласын

$$\Delta f|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} = df|_{(x_0;y_0)} + \frac{1}{2!} d^2 f|_{(x_0;y_0)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f|_{(x_0;y_0)} +$$

$$+\frac{1}{n!}\, d^n f|_{(x_0+\theta\Delta x; y_0+\theta\Delta y)}\ , \qquad (10.49)$$

кыскартылган көрүнүшкө келтирүүгө болот.

Ошентип Тейлордун (10.49) формуласынын жардамы менен

$u = f(x,y)$ функциясын $M_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги Δf өсүндүсүн жакындаштырып эсептөөгө болот. Анткени координаталар M_0 чекитинен оң же терс багытка (санга) $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ жетишерлик кичине аралыкка гана козголот деп ойлоп, (10.49) теңдештигинде биринчиден башка кошулуучуларды таштап, Δf өсүндүсүн df дифференциалы менен ($df \neq 0$ болсо гана) жакындаштырып теңдештирүүгө

$\Delta f|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} \approx df|_{(x_0;y_0)}$ болот. Эгерде бул жакындаштырып эсептөөдө көбүрөөк каталык кетет деп ойлосок, анда (10.49) Тейлордун формуласынын оң жагынан мүчөлөрдү (кошулуучуларды) өзүбүзгө керектүү тактыкка чейин калтырып, калганын таштоо менен Δf өсүндүсүн, керектүү тактыкка чейин эсептей алабыз.

Мисалы Маклорендин формуласы менен $u = e^x \sin y$ функциясын $M_0(0;0)$ чекитинде 3 – тартиптеги калдык мүчөсүнө чейин ажыраткыла.

Чыгаруу: ►Тейлордун (10.48) формуласын пайдаланып, 3 – тартиптеги калдык мүчөсүнө чейинки Тейлордун формуласын жазып алалы

$$u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = u(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)\cdot u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0,\\ y=y_0}} + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^3 u(x,y)\Big|_{\substack{x=x_0+\theta\Delta x,\\ y=y_0+\theta\Delta y}} =$$

$$= u(x_0,y_0) + u_x(x_0,y_0)\Delta x + u_y(x_0,y_0)\Delta y + \frac{1}{2!}\,[\,u_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2 +$$

$+2u_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+u_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2]+\frac{1}{3!}[u_{xxx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x^3+$

$+3u_{xxy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2\Delta y+3u_{yyx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2\Delta x+$

$+u_{yyy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y^3]$. Мындан $x_0=y_0=0$, $\Delta x=x$, $\Delta y=y$ маанилерин коюп,

$$u(x,y)=u(0,0)+u_x(0,0)x+u_y(0,0)y+\frac{1}{2!}[u_{xx}(0,0)x^2+$$

$$+2u_{xy}(0,0)xy+u_{yy}(0,0)y^2]+\frac{1}{3!}[u_{xxx}(\theta x,\theta y)x^3+$$

$$+3u_{xxy}(\theta x,\theta y)x^2y+3u_{xyy}(\theta x,\theta y)y^2x+u_{yyy}(\theta x,\theta y)y^3]$$

Маклорендин формуласын алабыз.

Берилген функциянын $M_0(0;0)$ чекитиндеги тиешелүү тартиптердеги аралаш туундуларынын маанилерин эсептейли:

$u(x,y)=e^x\sin y,\qquad u(0,0)=0;$

$u_x(x,y)=e^x\sin y,\qquad u_x(0,0)=0;$

$u_y(x,y)=e^x\cos y,\qquad u_y(0,0)=1;$

$u_{xx}(x,y)=e^x\sin y,\qquad u_{xx}(0,0)=0;$

$u_{xy}(x,y)=e^x\cos y,\qquad u_{xy}(0,0)=1;$

$u_{yy}(x,y)=-e^x\sin y,\qquad u_{yy}(0,0)=0;$

$u_{xxx}(x,y)=e^x\sin y,\qquad u_{xxx}(\theta x,\theta y)=e^{\theta x}\sin\theta y$;

$u_{xxy}(x,y)=e^x\cos y,\qquad u_{xxy}(\theta x,\theta y)=e^{\theta x}\cos\theta y$;

$u_{xyy}(x,y)=-e^x\sin y,\qquad u_{xyy}(\theta x,\theta y)=-e^{\theta x}\sin\theta y$;

$u_{yyy}(x,y)=-e^x\cos y,\qquad u_{yyy}(\theta x,\theta y)=-e^{\theta x}\cos\theta y$.

Табылган маанилерди Маклорендин формуласына койсок, берилген функция $M_0(0;0)$ чекитинде Маклорендин формуласы боюнча 3 – тартипке чейинки калдыгы менен

$$e^x\sin y=y+xy+\frac{1}{6}[e^{\theta x}\sin\theta y\cdot x^3+3e^{\theta x}\cos\theta y\cdot x^2y-$$

$-3e^{\theta x}\sin\theta y\cdot y^2x\ -e^{\theta x}\cos\theta y\cdot y^3$ - ажыралышы келип чыгат. ◄

§10.9 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын экстремумдары

10.9.1 Көп өзгөрүлмөлүү функциялардын экстремумдарын табуу шарттары

Айталы R^2 тегиздигинде жайгашкан D областында аныкталган эки өзгөрүлмөлүү $u=f(x,y)$ функциясы берилип, $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекити D областынын ички чекити болсун.

10.10 Аныктама. *Эгерде* $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ *чекитин жакынкы* $\delta-$ *аймакчасын түзүү мүмкүн болуп, аргументтерге бул аймакчанын сыртына чыгып кете албагандай* $|\Delta x|<\delta,\ |\Delta y|<\delta$ *өсүндүлөрдү берген кезде, функциянын тиешелүү өсүндүсү ар дайым*

$\Delta\mathrm{f}=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\le 0$ *терс мааниге ээ болсо, анда* $u=f(x,y)$ *функциясы* $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ *чекитинде локалдык максимумга, ал эми ар дайым* $\Delta\mathrm{f}=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\ge 0$ *оң болсо, анда локалдык минимумга ээ дейбиз.*

Локалдык дегенибиздин себеби, функциянын максимум (же минумум) мааниси M_0 чекитин жакынкы $\delta-$ чеке белинде (аймакчасында) жайгашкан гана $(x;y)\in(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ чекиттеринде сакталышы мүмкүн. Ошентип, берилген функция D областын бир же бир канча чекиттерин кичинекей аймакчасында локалдык максимум (минимум) маанилерди ала бериши мүмкүн. Жалпы учурда мындай чекиттерди функциянын экстремум чекиттери деп атайбыз.

M_0 чекитинин функциянын экстремум чекити болушу үчүн :

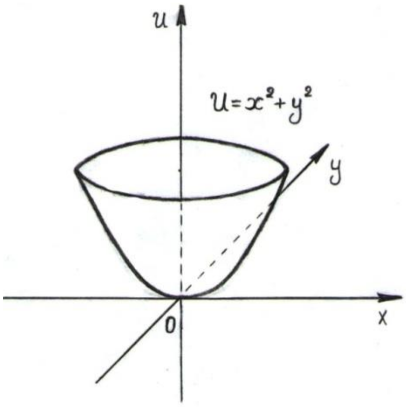
1) $\delta-$саны табылып, M_0 чекитин жакынкы $\delta-$чеке белин (аймакчасын) $\delta_{\mathrm{M}_0}=\{M(x;y)|\ \ \rho(\mathrm{M}_0,\mathrm{M})<\delta\ \}$ түзүү мүмкүн экендигин;

2) M_0 чекитин ушул $\delta_{\mathrm{M}_0}-$аймакчасында жайгашкан бардык $(x;y)$ чекиттеринде $\Delta\mathrm{f}=f(x,y)-f(x_0,y_0)$ айырмасынын белгисисин турактуу сакталышын;

көрсөтүү керек экендигин байкайбыз.

Чынында эле, $\forall(x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}$: $\Delta f\leq 0 \Leftrightarrow f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$ аткарылып, функциянын M_0 чекитиндеги мааниси аймакчадагы калган чекиттердеги маанилерине салыштырмалуу чоң болуп, M_0 локалдык максимум чекити болот. Ал эми

$\forall(x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}$: $\Delta f\geq 0 \Leftrightarrow f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$ болсо, функциянын M_0 чекитиндеги мааниси аймакчадагы калган чекиттердеги маанилерге салыштырмалуу кичине болуп, M_0 локалдык минимум чекити болот. Эгерде $\forall(x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}$: $\Delta f< 0 \Leftrightarrow f(x,y)< f(x_0,y_0)$ болсо, анда M_0 чекитин функциянын нагыз максимум чекити, ал эми

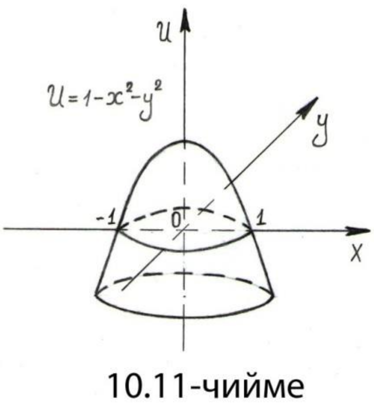


10.10-чийме

$\forall(x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}$: $\Delta f>0 \Leftrightarrow f(x,y)>f(x_0,y_0)$ болсо, нагыз минимум чекити деп атап, негизинен нагыз максимум жана минимум чекиттерине гана көңүл бурабыз. Функциянын δ_{M_0} аймагындагы нагыз максимум жана минимум чекиттериндеги маанилери

$$\max_{(x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}}\{f(x,y)\} \text{ жана } \min_{(x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}}\{f(x,y)\}$$

көрүнүштөрдө белгиленишип, функциянын максимуму жана минимуму деп аталышат. Жалпы учурда аларды функциянын экстремумдары деп коюшат.



10.11-чийме

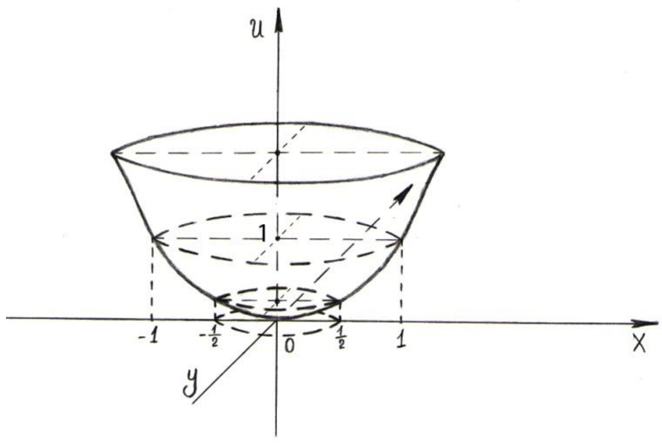
Мисалдар : 1) $u=x^2+y^2$ параболоиди жалгыз гана O(0;0) минимум чекитине ээ. Бул учурда минимум чекитине локалдык сөзү кошулбай айтылат, анткени 10.10 – аныктамасы O(0;0) чекитин кичинекей $\delta-$ аймакчасынын ичинде гана эмес, берилген функциянын бүтүндөй D аныкталуу областында аткарылат (10.10 - чийме). Функциянын минимуму

$$\min_{(x;y)\in D}\{x^2+y^2\ \} = 0^2+0^2=0$$

нөл санына барабар.

2) $u=1-x^2-y^2$ функциясы да жалгыз гана O(0;0) максимум чекитине ээ экендигин көрөбүз (10.11 – чийме). Функциянын максимуму

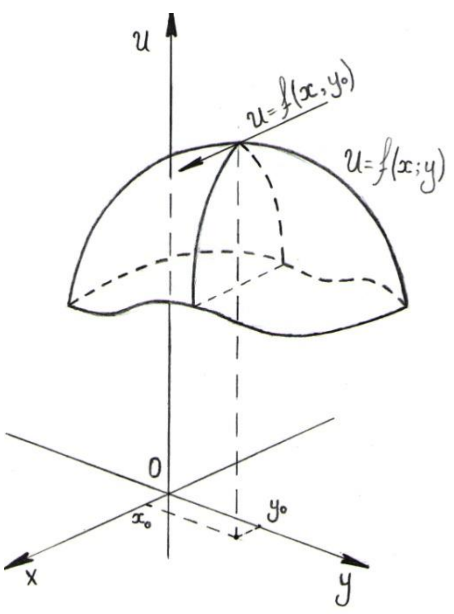
$$\max_{(x;y)\in D}\{1-x^2-y^2\} = 1-0^2-0^2=1$$



10.12-чийме

саны болот.

3) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & x^2+y^2\neq 0 \text{ болсо,} \\ 1, & \text{эгерде } x=y=0 \text{ болсо} \end{cases}$ функциясы үчүн O(0;0) чекити локалдык максимум чекит болот. Анткени O(0;0) чекитин $\delta=\frac{1}{2}=0{,}5$ - аймакчасын түзсөк, бул аймактын ичиндеги бардык $(x;y)$ чекиттери, функциянын O(0;0) чекитиндеги $f(0{,}0)=1$ маанисинен кичине экендигине күбө болобуз. Бирок, бул $\delta=\frac{1}{2}-$ аймакчанын сыртында жайгашкан чекиттерде функциянын мааниси $f(0{,}0)=1$ чоңдугунан чоң болуп, максималдык маани айтылган аймактын ичинде гана сакталгандыктан, O(0;0) чекити локалдык максимум чекити гана боло алат. Мисалда каралган функция, 1) – мисалдагы функциянын O(0;0) чекитинде үзүлүүгө ээ болгон учуру болуп, ал функциянын графиги болгон парболоиддин чокусунан кыркылып үзүлгөн чекит, Ou аппликата огундагы 1 чекитине жылып кеткендиги менен айырмаланат (10.12 – чийме).



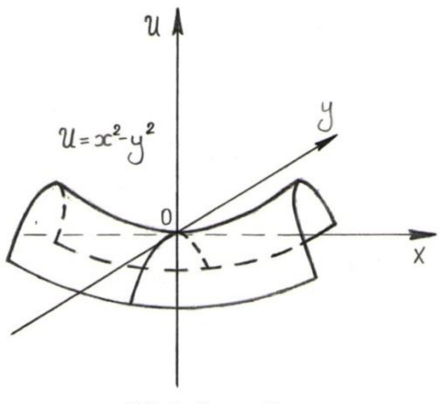
10.13-чийме

Функциянын $\delta_{(0;0)} = \left\{(x; y) \middle| \, x^2 + y^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$ - аймакчасындагы локалдык минимуму $\min\{f(x,y)\} = f(0,0) = 0$ саны болот.

10.5 Теорема (Экстремумга ээ болуунун зарыл шарты).

Эгерде $u = f(x,y)$ *функциясы* $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ *чекитинде экстремумга ээ болсо, анда анын бул чекиттеги жекече туундулары же нөлгө барабар болушат же таптакыр жашашпайт.*

Далилдөө: ►Айталы $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинде $u = f(x,y)$ функциясы экстремумга ээ болсун дейли. Убактынча y өзгөрүлмөсүн кыймылын токтотуп, $y = y_0$ болуп турсун дейли, же болбосо аргументтер M_0 чекитинен $y = y_0$ түзүн бойлоп гана өзгөрөт деп эсептейли. Анда бул түздүн чекиттеринде берилген функцияны $u = f(x, y_0)$ көрүнүштөгү бир өзгөрүлмөлүү функция катарында кароого болот. Бул бир өзгөрүлмөлүү функция теореманын шарты боюнча $x = x_0$ чекитинде экстремумга (максимумга же минимумга) ээ болгондуктан (10.13 - чийме), анын x ке карата туундусу, бул шектүү чекитте $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0; y_0)} = 0$ нөлгө тең болору же такыр жашабашы келип чыгат. Анткени функциянын $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитиндеги туундусу жалгыз гана болгондуктан, бул чекиттеги $y = y_0$ түзүн бойлоп табылган туунду, башка ар түрдүү багыттар боюнча табылган туундуларга барабар болушу керек. Эгерде алар өз ара барабар эмес болушса, анда функциянын M_0 чекитиндеги туундусу жашабайт болчу.



10.14-чийме

Ушундай эле талкуулоону $x = x_0$ түзүн бойлоп өзгөргөн $u = f(x_0, y)$ бир өзгөрүлмөлүү функциясы үчүн жүргүзүп, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0; y_0)} = 0$ болору, же болбосо бул жекече туундунун такыр жашабасына ишенебиз.◄

Далилденген теорема экстремум чекиттерин жашашынын зарыл гана шартын көрсөтүп, M_0 чекитинде жекече туундуларын нөлгө барабар болуусу же такыр жашабашы эле, M_0 чекитин сөзсүз экстремум чекити болуусуна толук кепилдик бере албайт. Ошондуктан зарыл шартты канааттандырган чекиттерди, экстремум болууга күмөндүү же шектүү чекиттер (критикалык чекиттер) деп айтабыз. Ал эми жекече туундулары $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ нөлгө айланган шектүү чекиттерди, турактуулук (стационардык) чекиттер дейбиз.

Мисалы $u = x^2 - y^2$ функциясын $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$ жекече туундулары O(0;0) чекитинде нөлгө айланганы менен, бул чекит функцияга экстремум чекити боло албайт (10.14 – чийме). Чынында эле O(0;0) чекитин жакынкы чеке белинде жайгашкан $M(x; y)$ чекиттеринде Δf өсүндүсү белгисин турактуу сактай албасын көрсөтүүгө болот. O(0;0) чекитине эки багыт боюнча чексиз жакындайлы: 1) $y = 0$ түзүн ($Ox -$ огу) бойлоп $M(x; 0)$ чекиттери аркылуу келсек,

$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = x^2 - 0^2 - (0^2 - 0^2) = x^2 > 0$ оң белгиде;

2) $x = 0$ түзүн (Oy –огу) бойлоп $M(0;\ y)$ чекиттери аркылуу жакындасак,

$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = 0^2 - y^2 - (0^2 - 0^2) = -y^2 < 0$терс белгиде болуп, экстремум чекит болуунун 2) – шарты аткарылбайт. Ошентип O(0;0) чекити мисалдагы функцияга стационардык гана чекит боло алат.

10.6 Теорема (Экстремумга ээ болуунун жетиштүү шарты).

Айталы $M_0(x_0; y_0)$ *чекити,* $f(x, y)$ *функциясына экстремум чекит болууга шектелген стационардык чекит болсун,*

б.а. $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$. *Ошондой эле* $f(x, y)$ *функциясы* M_0 *чекитинде жана анын жакынкы чеке белиндеги бардык чекиттерде, биринчи жана экинчи тартиптеги үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун. Анда* $M_0(x_0; y_0)$ *чектитин экстремум чекит болуусу үчүн, төмөндөгү шарттардын аткарылуусу жетиштүү шарт болот:*

1) *Эгерде* M_0 *чекитинде жекече туундулардын маанилеринен түзүлгөн*

$$D(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{xy}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0)\end{vmatrix}=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-$$

$-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2>0$ *аныктагычын сандык мааниси оң болсо жана* $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$ $\left(f''_{yy}(x_0,y_0)<0\right)$ *терс болушса, анда* M_0 *чекити* $f(x,y)$ *функциясын максимум чекити болот;*

2) *Эгерде* $D(x_0,y_0)$ *аныктагычын сандык мааниси* $D(x_0,y_0)>0$ *оң болсо жана* $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$ $\left(f''_{yy}(x_0,y_0)>0\right)$ *оң болушса, анда* M_0 чекити $f(x,y)$ *функциясын минимум чекити болот.*

3) *Эгерде* M_0 *чекитинде* $D(x_0,y_0)<0$ *болсо, анда* $f(x,y)$ *функциясы бул чекитте экстремумга ээ болбойт.*

4)$D(x_0,y_0)=0$ *болсо, анда* M_0 *чекитинде* $f(x,y)$ *функциясын экстремумга ээ болуусу же болбошу күмөндүү калып, аны тактоо үчүн кошумча изилдөөлөрдү жүргүзүү керек.*

Далилдөө : ►$\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинде $f(x,y)$ функциясын экинчи тартиптеги калдык мүчөсүнө чейин Тейлордун көп мүчөсүнө ажыраталы :

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+$$

$$+\frac{1}{2!}\,[\,f''_{xx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2+ \qquad (10.50)$$

$$+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2],$$

$0<\theta<1.$

Теореманын шарты боюнча $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$ болгондуктан, (10.50) теңдештигинен функциянын M_0 чекитиндеги өсүндүсүн

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2!}\,[\,f''_{xx}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2+$$

$+2f''_{xy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2]$ көрүнүштө жазып, анын белгиси квадраттык кашаанын ичиндеги үч кошулуучулардын суммасын белгисинен көз каранды болорун байкайбыз. θ көбөйтүүчүсү (параметри) $0\le\theta\le 1$ аралыгында өзгөргөн кезде, $(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)$ маанилери M_0 чекитин жакынкы

$\delta_{\mathrm{M}_0}=\{(x;y)|x_0\le x\le x_0+\Delta x,\ y_0\le y\le y_0+\Delta y\}-$ чеке белин же төрт бурчтугун ичинде жайгашкан бардык $(x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}$ чекиттерин кабыл алат ($|\Delta x|, |\Delta y|$ жетишерлик кичине сандар). Бул төрт бурчтуктун ичиндеги чекиттер $x=x_0+\theta\Delta x,\ y=y_0+\theta\Delta y$ координаталарына ээ болушат. Ошондуктан M_0 чекитинин жакынкы чеке белиндеги чекиттерде функциянын өсүндүсүн

$$\Delta f=\frac{1}{2!}\left[f''_{xx}(x,y)\Delta x^2+2f''_{xy}(x,y)\Delta x\Delta y+f''_{yy}(x,y)\Delta y^2\right]=\frac{1}{2!}d^2f,$$

көрүнүштө жазып, өсүндүнүн $\delta_{\mathrm{M}_0}-$чеке белиндеги белгиси, экинчи тартиптеги d^2f дифференциалын белгиси менен аныкталарын сезебиз. Эстөөгө жеңил болсун үчүн

$\mathrm{A}=f''_{xx}(x,y),\ \mathrm{B}=f''_{xy}(x,y),\ \ \mathrm{C}=f''_{yy}(x,y)$ белгилөөлөрүн киргизип,

$$\Delta f=\frac{1}{2!}\left[\mathrm{A}\cdot\Delta x^2+2\,\mathrm{B}\cdot\Delta x\Delta y+\mathrm{C}\cdot\Delta y^2\right],\ (x;y)\in\delta_{\mathrm{M}_0}$$

теңдештигин түзөбүз. Демек $\mathrm{A}=f''_{xx}(x,y)\ne 0$ болсо, бул теңдештикти алгебралык өзгөртүп түзүүлөрдүн жардамы менен

$$\Delta f=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\mathrm{A}}\cdot\left[(\mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y)^2+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot\Delta y^2\right], \quad (10.51)$$

көрүнүшкө келтирүүгө болот. Мындан Δf тин белгиси, $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2$ менен A нын белгилеринен көз каранды экендиги байкалат. Айталы $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитинде

$\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2=f''_{xx}(x_0,y_0)\cdot f''_{yy}(x_0,y_0)-\left(f''_{xy}(x_0,y_0)\right)^2>0$ оң болсун, анда теореманын шарты боюнча экинчи тартиптеги жекече туундулары үзгүлтүксүз болгондуктан, бул белги $\delta_{\mathrm{M}_0}-$жакынкы чеке белиндеги чекиттерде сакталып, (10.51) теңдештигин оң жагындагы квадраттык кашаанын ичинде жалаң оң сандар тургандыктан, Δf өсүндүсүн белгиси $\mathrm{A}=f''_{xx}(x_0,y_0)-$ санын (же $\mathrm{C}=f''_{yy}(x_0,y_0)-$ санынын) белгиси менен дал келүүгө тийиш. Анткени $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2>0$ шарты аткарылышы үчүн, А менен С бирдей белгиде болушу керек, болбосо эки кошулуучу тең терс болуп, $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2<0$ терс болушу келип чыгат.

Ошентип,

$$D(x_0,y_0)=\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2>$$

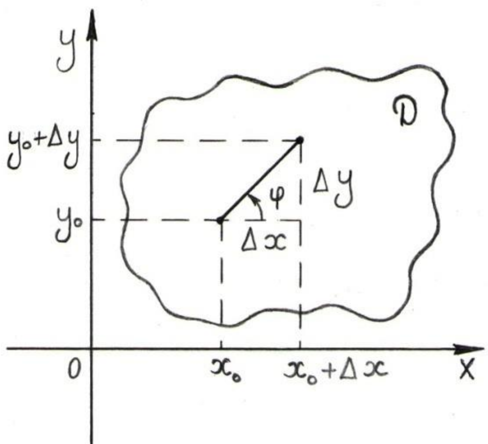
$$>\begin{cases}\mathrm{A}<0\ (\mathrm{C}<0)\text{болсо, } \Delta f\le 0 \text{ же } \mathrm{M}_0 \text{ максимум,}\\ \mathrm{A}>0\ (\mathrm{C}>0)\text{болсо, } \Delta f\ge 0 \text{ же } \mathrm{M}_0 \text{ минимум}\end{cases}$$

чекиттери болушуп, теореманын 1), 2) – кортундулары далилденет.

3) – кортундуну далилдөө: $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2<0$ болгон учурда Δf өсүндүсүн белгиси, $\delta_{\mathrm{M}_0}-$чеке белиндеги чекиттердин $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитине жакындоо багыттарынан көз каранды болуп, туруктуу бир белгини сактай алышпайт. Чынында эле $\mathrm{A}\neq 0$ болгон учурда, $\delta_{\mathrm{M}_0}-$ төрт бурчтугун четинде жайгашкан $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$ чекитинен $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекитине φ бурчу же багыты боюнча жакындап келсек (10.15 – чийме), $\Delta x=\rho\cos\varphi, \Delta y=\rho\sin\varphi$ болгондуктан, (10.51) теңдештигин

$$\Delta f=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{\mathrm{A}}\cdot[(\mathrm{A}\Delta x+\mathrm{B}\Delta y)^2+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot\Delta y^2]=$$

$=\frac{\rho^2}{2\mathrm{A}}[(\mathrm{A}\cos\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi)^2+(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot(\sin\varphi)^2]$ көрүнүштө жазып, $\varphi=0$ багыты боюнча M_0 гө жакындаганда $\Delta f=\frac{\rho^2}{2\mathrm{A}}\cdot\mathrm{A}^2=\frac{\mathrm{A}\cdot\rho^2}{2}$ болуп, $\mathrm{A}>0 \Rightarrow \Delta f>0$ болорун көрөбүз. Ал эми φ бурчунун багытын



10.15-чийме

$\mathrm{A}\cos\varphi+\mathrm{B}\sin\varphi=0\ (\sin\varphi\neq 0)$ шарты аткарыла тургандай $\varphi=\varphi_1$ деп тандасак, анда функциянын өсүндүсү

$$\Delta f=\frac{\rho^2}{2\mathrm{A}}[(\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2)\cdot(\sin\varphi_1)^2]$$

көрүнүшүнө келип, $\mathrm{A}>0$ оң болсо деле $\mathrm{A}\cdot\mathrm{C}-\mathrm{B}^2<0$ болгондуктан, $\Delta f<0$ терс болуп калат. Демек экстремумга ээ болуунун 2) – шарты аткарылбайт же M_0 чекитин жакынкы $\delta_{\mathrm{M}_0}-$ чеке белинде

Δf өсүндүсү өз белгисин турактуу сактай албайт, анда M_0 чекитинде функция экстремумга ээ болбойт.

4) – кортундуга түшүндүрмө : $\mathrm{A} \cdot \mathrm{C} - \mathrm{B}^2 = 0$ болуп калса, (10.51)

$$\Delta f = \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{\mathrm{A}} \cdot [(\mathrm{A}\Delta x + \mathrm{B}\Delta y)^2 + (\mathrm{A} \cdot \mathrm{C} - \mathrm{B}^2) \cdot \Delta y^2] = \frac{1}{2\mathrm{A}} (\mathrm{A}\Delta x + \mathrm{B}\Delta y)^2$$

көрүнүшүнө келип, Δf өсүндүсүн белгиси бир гана $\frac{1}{2\mathrm{A}}$ көбөйтүндүсүндөгү $\mathrm{A} = f''_{xx}(x, y)$ нын белгисинен көз каранды болгону толук ишеничти жарата албай, кошумча тактоону талап кылат. Анткени функциянын жүрүм турумун толук таануу үчүн, экинчи y өзгөрүлмөсүн бгыты боюнча өзгөрүүлөрдү да үйрөнүү керек. Ошондуктан Тейлордун формуласынан Δf өсүндүсүн белгисин тагыраак аныктоо максатында, чоңураак тартиптеги мүчөлөрдү кошумча киргизүү менен, изилдөөнү улантууга мажбур болобуз. ◄

Мисалдар : 1) $u = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6$ функциясын экстремумдарын изилдейли. Берилген функциянын жекече туундуларын таап: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + 4$, аларды нөлгө теңдештирип, $\begin{cases} 2x - 2 = 0 , \\ 4y + 4 = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасын чечүү менен $(x = 1 ,\ y = -1)$, $\mathrm{M}_0(1; -1)$ стационардык чекитин аныктайбыз. Экинчи тартиптеги жекече туундулары $u_{xx} = 2$, $u_{xy} = 0$, $u_{yy} = 4$ турактуу сандар болушкандыктан, алардын $\mathrm{M}_0(1; -1)$ чекитиндеги маанилери өзгөрүүсүз калат

$\mathrm{A} = u_{xx}(1, -1) = 2$, $\mathrm{B} = u_{xy}(1, -1) = 0$, $\mathrm{C} = u_{yy}(1, -1) = 4$. Анда $\mathrm{D}(x_0, y_0)$ аныктагычын сандык мааниси

$\mathrm{D}(1, -1) = \mathrm{A} \cdot \mathrm{C} - \mathrm{B}^2 = 8 > 0$ оң сан болуп, $\mathrm{A} = 2 > 0$ $(\mathrm{C} = 4 > 0)$ шарты аткарылып, 10.6 – теорема боюнча $\mathrm{M}_0(1; -1)$ чекити берилген функциянын минимум чекити болот.

Берилген функцияны алгебралык өзгөртүп түзүү менен

$u = x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 6 = (x - 1)^2 + 2(y + 1)^2 - 9$ көрүнүшүнө келтирип, ушул эле натыйжага ээ болуп, $\mathrm{M}_0(1; -1)$ чекитин берилген функцияга жалгыз гана минимум чекит

$\underbrace{\min}_{(x,y)\in R^2} \{ x^2+2y^2-2x+4y-6 \} = -9$ болорун көрөбүз.

2) $u=4xy$ функциясын экстремумдарын изилдейли. Анын жекече туундулары $\frac{\partial u}{\partial x}=4y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4x$ болуп, $\begin{cases}4y=0\,, \\ 4x=0\end{cases}$ теңдемесинен $x=0, y=0$ чечимдерин таап, берилген функциянын стационардык $\text{M}_0(0;\ 0)$ чекитин аныктайбыз. Экинчи тартиптеги жекече туундулары $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=4$ турактуу сандар болушкандыктан, алардын $\text{M}_0(0;\ 0)$ чекитиндеги маанилери $\text{A}=0, \text{C}=0, \text{B}=4$ өзгөрүүсүз калып,

$\text{D}(x_0,y_0)=0\cdot 0-4^2=-16<0$ терс болгондуктан, 10.6 – теореманын негизинде берилген функция бул $\text{M}_0(0;\ 0)$ шектүү чекитинде экстремумга ээ болбойт деген жыйынтыкка келебиз.

3) $u=x^4+y^4$ функциясын экстремумдарын табуу үчүн, жекече туундуларын эсептеп, $\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3$, $\frac{\partial u}{\partial y}=4y^3$, аларды нөлгө теңдөө менен $\text{M}_0(0;\ 0)$ стационардык чекитин табабыз. Экинчи тартиптеги жекече туундуларын $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=12y^2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$ эсептеп, $\text{M}_0(0;\ 0)$ чекитиндеги маанилерин

$$\text{A}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(0;\,0)}=0;\ \ \text{B}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{(0;\,0)}=0;\ \text{C}=\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(0;\,0)}=0$$

табабыз. Бул M_0 шектүү чекитинде

$\text{D}(x_0,y_0)=\text{D}(0,0)=\text{A}\cdot\text{C}-\text{B}^2=0$ болуп, 10.6 – теорема боюнча, бул чекитте экстремумга ээ болор – болбосу белгисиз калып, кошумча изилдөөнү талап кылат. Ошондуктан берилген функциянын $\text{M}_0(0;\ 0)$ чекитиндеги өсүндүсүн $\Delta u(0,0)=u(x,y)-u(0,0)=x^4+y^4$ көрүнүштө жазсак, анда $\text{M}_0(0;\ 0)$ чекитин жакынкы чеке белинде гана эмес, функциянын R^2 аныкталуу областындагы M_0 дөн башка бардык $(x;y)$ чекиттеринде $\Delta u=x^4+y^4>0$ шарты аткарылып, 10.10 – аныктамасын негизинде $\text{M}_0(0;\ 0)$ минимум чекити болорун көрөбүз. Чынында эле берилген функция чокусу $\text{M}_0(0;\ 0)$ чекитинде болгон, бутактары жогору караган параболоид болуп, аныкталуу областында жалгыз гана минимум чекитине ээ болот, б.а. функциянын ушул чекиттеги маанисинен кичине башка маанилери жок болгондуктан, аны абсолюттук минимум чекити дейбиз.

Ушундай эле талкуулоолорду жүргүзүп, чокусу $\mathrm{M}_0(0;\ 0)$ чекитинде жайгашып, бутагы төмөн караган $u = -x^4 - y^4$ параболоидинде да

$\mathrm{D}(0{,}0) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{C} - \mathrm{B}^2 = 0$ болгонуна карабастан, M_0 чекитинен башка бардык $(x; y)$ чекиттеринде функциянын өсүндүсү

$\Delta u(0{,}0) = u(x, y) - u(0{,}0) = -x^4 - y^4 < 0$ терс болгондуктан, 10.10 – аныктамасын негизинде $\mathrm{M}_0(0;\ 0)$ чекитин анын абсолюттук максимум чекити дейбиз.

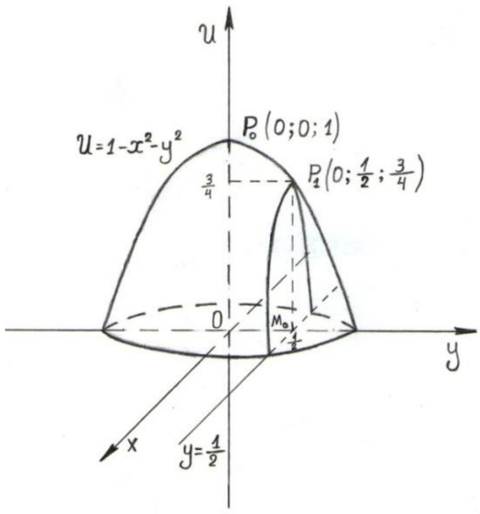
Жалпы n өзгөрүлмөлүү $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын бардык өзгөрүлмөлөрү боюнча жекече туундулары $\mathrm{M}_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ чекитинде $\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{\mathrm{M}_0} = 0 \quad (i = 1\,, 2, 3, \dots, n)$ нөлгө барабар болушса, анда аны берилген функциянын стационардык чекити деп атайбыз. Ал эми экстремумга ээ болуунун жетишерлик шартын баяндаган 10.6 – теореманы төмөндөгүдөй жалпылоого болот.

10.7 Теорема. *Айталы* $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *функциясы стационардык* $\mathrm{M}_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ *чекитин жакынкы чеке белинде аныкталган жана экинчи тартиптеги үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болсун, анда берилген функциянын* M_0 *чекитиндеги экинчи тартиптеги дифференциалын мүнөздөгөн*

$$D(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{I,J=1}^{N} \left.\frac{\partial^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_I \partial x_j}\right|_{\mathrm{M}_0} dx_i\, dx_j \qquad (10.52)$$

квадраттык формасы оң сан болсо, анда M_0 *чекити* $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *функциясына минимум чекит, ал эми (10.52) квадраттык формасы терс сан болсо, максимум чекити болот. Эгерде (10.52) квадраттык формасынын* M_0 *чекитиндеги белгиси өзгөрүлмө болсо (*M_0 *чекитине жакындоо багыттарына жараша ар кандай белгилерге ээ болсо), анда* M_0 *чекити экстремум чекит боло албайт.*

Баяндалган теореманы далилдөөсүз кабыл алып, практикалык эсептөөлөрдө колдоно беребиз.



10.16-чийме

10.9.2 Шарттуу экстремумдар

$u = f(x,y)$ функциясын каралган экстремум чекиттерин аныктоодо, анын аргументтерине эч кандай шарт коюлбагандыктан, ал экстремумдарды шартсыз экстремумдар дейбиз. Бирок, көбүнчө функциянын аргументтерине шарттар коюлган кездеги экстремумдарды издөөгө туура келет.

Айталы D областында аныкталган $u = f(x,y)$ функциясы берилип, анын D областында жайгашкан L ийрисинде жатуучу чекиттердеги экстремумдарын табуу талап кылынсын. Мындай экстремумдар функциянын L ийрисиндеги шарттуу экстремумдары деп аталышат.

10.11 Аныктама. *L ийрисиндеги* $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ *чекити менен кошо, анын жакынкы чеке белиндеги L ийрисин* $\mathrm{M}(x;y)$*чекиттеринде да* $f(x,y) < f(x_0,y_0)$ $(f(x,y) > f(x_0,y_0))$ *барабарсыздыгы аткарылса, анда* $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ *чекитин* $u = f(x,y)$ *функциясын L ийриси боюнча шарттуу максимум (минимум) чекити деп айтабыз* $(\mathrm{M}_0(x_0;y_0), \mathrm{M}(x;y) \in L)$.

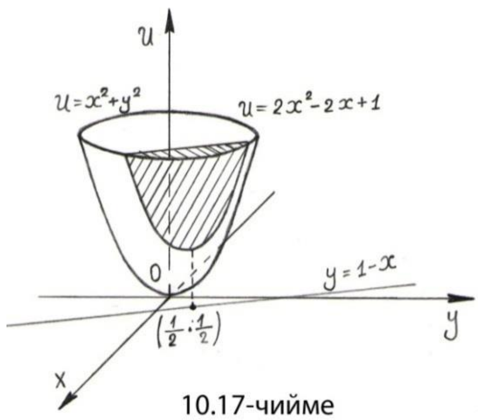
Ошентип D областында L ийриси $\varphi(x,y) = 0$ теңдемеси менен берилсе, анда шарттуу экстремумдарды табуу маселеси: «$u = f(x,y)$ *функциясын* $\varphi(x,y) = 0$ *шартын канааттандыруучу экстремумдарын тапкыла*» – көрүнүштө берилип, (x,y) аргументтерин көз каранды эмес өзгөрүлмөлөр дебестен, бири - бири менен $\varphi(x,y) = 0$ *байланыш теңдемеси* аркылуу көз карандылык байланышта турган өзгөрүлмөлөр катарында мамиле жасайбыз.

Мисалы $u = 1 - x^2 - y^2$ функциясына $(0;0)$ чекити абсолюттук максимум

$\underbrace{\max}_{(x,y)\in R^2} \{1 - x^2 - y^2\} = 1 - 0^2 - 0^2 = 1$ чекити болот (параболоиддин чокусу P(0;0;1) чекити). Ал эми $\varphi(x,y) \equiv y = \frac{1}{2}$ байланыш теңдемеси менен берилген L түзүндөгү шарттуу экстремум (максимум) чекити $M_0(0;\frac{1}{2})$ болот (10.16 – чийме). Чынында эле параболоиддин $y = \frac{1}{2}$ тегиздиги менен кесилиши

$u = 1 - x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - x^2$ параболасы болуп, анын чокусу $P_1\left(0;\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ чекитинде жайгашат жана шарттуу экстремум

$\underbrace{\max}_{x\in R} \left\{\frac{3}{4} - x^2\right\} = \frac{3}{4} - 0^2 = \frac{3}{4}$ көрүнүштө аныкталат.



10.17-чийме

- Шартту экстремумду аныктоонун бир жөнөкөй усулун көрсөтөлү: Айталы, $\varphi(x,y) = 0$ байланыш теңдемеси y ке карата бир маанилүү $y = \psi(x)$ көрүнүшүтөгү x өзгөрүлмөсү боюнча дифференцирленүүчү функция катарында чечилсин, анда табылган маанини берилген эки өзгөрүлмөлүү функцияга коюп, байланыш шартын өзүнө камтыган $u = f(x,y) = f(x,\psi(x)) = F(x)$ бир өзгөрүлмөлүү функциясына ээ болбуз. Натыйжада $u = F(x)$ функциясын экстремуму, $u = f(x,y)$ функциясын изделген шарттуу экстремуму болору келип чыгат.

Мисалы, $u = x^2 + y^2$ функциясын $\varphi(x,y) \equiv x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган экстремумун табуу керек болсун. Берилген байланыш теңдемесинен $y = 1 - x$ функциясын аныктап, аны берилген функцияга койсок, бир өзгөрүлмөлүү

$u = u = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1 = F(x)$ функциясына ээ болобуз. Анын стационардык чекити $F'(x) \equiv 4x - 2 = 0$ шартынан, $x = \frac{1}{2}$ болуп табылат. Стационардык чекиттеги экинчи тартиптеги туундусу $F''(x) = (4x-2)'|_{x=\frac{1}{2}} = 4 > 0$ оң сан болгондуктан, $x = \frac{1}{2}$

чекити бир өзгөрүлмөлүү $F(x)$ функциясына минимум чекити болот. Ал эми $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\ , \\ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ байланышынан аныкталуучу $\mathrm{M}_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ чекити,

$u = x^2 + y^2$ функциясына $x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган шарттуу минимум чекити болот (10.17 – чийме).

∘ Шарттуу экстремумдарды Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен аныктоого токтололу :

Айталы $\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекити, $u = f(x,y)$ функциясын $\varphi(x,y) = 0$ байланыш теңдемесин канааттандыруучу шарттуу экстремум чекити болуп, байланыш теңдемесинен x_0 чекитин жакынкы чеке белинде үзгүлтүксүз туундусу жашаган жалгыз $y = \psi(x)$ функциясы табылсын дейли. $\mathrm{M}_0(x_0;y_0) \equiv \mathrm{M}_0(x_0;\psi(x_0))$ чекитинде жекече туундулары нөлгө барабар болгондуктан, бул чекитте $u = f(x,y)$ тин биринчи тартиптеги $du = df(x,y) = df(x,\psi(x)\,)$ дифференциалы да нөлгө барабар болушу керек

$$df|_{\mathrm{M}_0} = \left(f'_x dx + f'_y dy\right)\Big|_{\mathrm{M}_0} = 0\ . \qquad (10.53)$$

$\mathrm{M}_0(x_0;y_0)$ чекити $\varphi(x,y) = 0$ байланыш теңдемеси менен берилген L түзүндө жайгашкандыктан, (10.53) теңдештиги $\varphi(x,y) = 0$ үчүн да аткарылат

$$d\varphi|_{\mathrm{M}_0} = \left(\varphi'_x dx + \varphi'_y dy\right)\Big|_{\mathrm{M}_0} = 0\ . \qquad (10.54)$$

(10.54) теңдештигин азырынча белгисиз деп алынган λ санына көбөйтүп, (10.53) теңдештиги менен мүчөлөп кошсок,

$(f'_x + \lambda\varphi'_x)|_{\mathrm{M}_0} dx + \left(f'_y + \lambda\varphi'_y\right)\Big|_{\mathrm{M}_0} dy = 0$ теңдештигине ээ болобуз. Бул теңдештик, M_0 экстремум чекитиндеги функциянын жекече туундуларын нөлгө тең болуу шартын, *берилген функция менен байланыш функциясы экөөсүнүн тең* M_0 *чекитинде дифференциалдарын нөлгө тең болуу* шартына жалпылап, $u = f(x,y)$ функциясын L түзүндөгү шарттуу экстремумун жашашын **зарыл шарты** катарында кабыл алабыз. Эгерде λ санын $\varphi'_y \neq 0$ болгон учурда

$$\left(f'_y + \lambda\varphi'_y\right)\Big|_{\mathrm{M}_0} = 0 \qquad (10.55)$$

шартын канааттандыра тургандай тандай алсак, жогорудагы теңдештиктеги биринчи кошулуучуну (dx эркин козголуу саны болгондуктан, аны нөлдөн айырмалуу деп)

$$(f'_x + \lambda\varphi'_x)|_{\mathrm{M}_0} = 0, \qquad (10.56)$$

көрүнүштө жазууга болот.

Лагранждын функциясы деп аталуучу жардамчы.

$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ функциясын түзсөк, (10.55), (10.56) теңдештиктери бул жардамчы функция үчүн, $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ дун шартсыз экстремум чекит болуусунун **зарыл шарты** болуп каларын көрөбүз. Мында λ саны (10.55) теңдештигинен табылуучу коффициент болот. Ошентип жаңыдан түзүлгөн Лагранждын функциясын пайдаланып,

$u = f(x, y)$ функциясын шарттуу экстремумдарын аныктоонун дагы бир эрежесин киргизебиз.

$u = f(x, y)$ функциясын $\varphi(x, y) = 0$ байланыш теңдемесин канааттандырган экстремум чекиттерин табуу үчүн :

1) Лагранждын жардамчы $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ функциясын түзөбүз;

2) Лагранждын функциясын жекече туундуларын $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ эсептеп, аларды нөлгө теңдейбиз;

3) Байланыш теңдемесин $\varphi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$ көрүнүштөрдө жазабыз.

Үчөөнү бириктирип

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \qquad (10.57)$$

үч λ, x, y белгисиздерине карата үч теңдемелер системасына ээ болобуз. Эгерде бул система чыгарылышка ээ болсо, анда ал чечимдер: $\lambda = \lambda_0$ белгисиз болгон коэффициент, ал эми $x = x_0$, $y = y_0$ түгөйлөрү

$u = f(x, y)$ функциясын экстремумга шектелген чекиттерин координаталары болушат. (10.57) теңдемелер системасынан табылган $\lambda = \lambda_0$ санын жана $\text{M}_0(x_0; y_0)$ шектүү чекитин эске алып, Лагранждын функциясын экинчи тартиптеги дифференциалын $\text{M}_0(x_0; y_0)$ шектүү чекитиндеги маанисин белгисин тактайбыз.

Эгерде $d^2F(x, y)|_{\text{M}_0} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2|_{\text{M}_0} < 0$ болсо, анда Лагранждын $F(x, y)$ функциясына $\text{M}_0(x_0; y_0)$ шартсыз максимум чекити, ал эми $u = f(x, y)$ функциясына шарттуу максимум чекити болот. $d^2F(x, y)|_{\text{M}_0} > 0$ болсо, анда Лагранждын $F(x, y)$ функциясына $\text{M}_0(x_0; y_0)$ шартсыз минимум чекити, ал эми $u = f(x, y)$ функциясына шарттуу минимум чекити болот. Бул жерде $d^2F(x, y)$ экинчи тартиптеги дифференциалын эсептөөдө

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0$$

$((dx)^2 + (dy)^2 \neq 0 -$ "dx, dy бир учурда нөл болбойт")

болору эске алынды. Эскерте кетүүчү нерсе, Лагранждын жардамчы функциясы $u = f(x, y)$ функциясына коюлган шартты эске алып түзүлгөн, шарты жок функция болуп эсептелгендиктен, $\text{M}_0(x_0; y_0)$ чекитин Лагранждын $F(x, y)$ функциясы үчүн шартсыз максимум (минимум) чекити деп айтабыз.

Лагранждын жогрудагы төрт этаптан турган методу менен

$u = f(x, y)$ функциясын шарттуу экстремумдарын аныктоодо, 4) – этапта жаңы белгилөөлөрдү $A = F''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = F''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = F''_{yy}(x_0, y_0)$ киргизүү менен

$$D(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} F''_{xx}(x_0, y_0) & F''_{xy}(x_0, y_0) \\ F''_{xy}(x_0, y_0) & F''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$$ аныктагычы оң

болгон учурда $u = f(x, y)$ функциясы үчүн:

а) $A = F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ $(C = F''_{yy}(x_0, y_0) < 0)$ болсо, $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ шарттуу максимум чекити;

б) $A = F''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ $(C = F''_{yy}(x_0, y_0) > 0)$ болсо, $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ шарттуу минимум чекити болот дейбиз.

Мисал катары мурда келтирилген $u = x^2 + y^2$ функциясын $\varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган экстремумун, кайра Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен көрсөтөлү:

1) Лагранждын функциясын

$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda\,(x + y - 1)$ түзөбүз.

2) $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv 2y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv x + y - 1 = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасынан $\lambda = -1,\ x = y = \frac{1}{2}$

чечимдерин таап, экстремумга ээ болууга шектелген чекит $\mathrm{M}_0\left(\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right)$ болорун көрөбүз. Лагранждын функциясына $\lambda = -1$ маанисин коюп, $F(x, y) = x^2 + y^2 - \ (x + y - 1) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ ээ болобуз. Анын экинчи тартиптеги жекече туундулары $F''_{xx} = 2,\ F''_{xy} = 0,\ F''_{yy} = 2$ турактуу сандар болгондуктан, алардын $\mathrm{M}_0\left(\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right)$ чекитиндеги маанилери да ошол эле бойдон калышып,

$A = F''_{xx}\left(\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right) = 2,\quad B = F''_{xy}\left(\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right) = 0\ ,\quad C = F''_{yy}\left(\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right) = 2\ ,$ аныктагычтын белгиси $D(x_0, y_0) = AC - B^2 = 4\ > 0$ оң сан болорун көрөбүз. $A = 2 > 0$ $(\mathrm{C} = 2 > 0)$ болуп, б) – учуру аткарылгандыктан, $u = x^2 + y^2$ функциясын $x + y - 1 = 0$ шартын канааттандырган шарттуу минимум чекити $\mathrm{M}_0\left(\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right)$ болору келип чыгат.

Бирок Лагранждын $F(x, y)$ функциясын шартсыз экстремумдары табылбай калса эле, $u = f(x, y)$ функциясын $\varphi(x, y) = 0$ байланыш теңдемесин канааттандырган шарттуу экстремумдары табылбайт, же жок деп эсептөө туура эмес.

Мисалы $u = xy$ функциясын $\varphi(x,y) \equiv y - x = 0$ шартын канааттандырган экстремум чекиттерин Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен издеп көрөлү.

1) Лагранждын функциясын түзөлү

$F(x,y) = xy + \lambda(y - x);$

2) $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} \equiv y - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} \equiv x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \equiv y - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ y - x = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасынан

$x = y = \lambda = 0$ чечимдерин тапсак, Лагранждын жардамчы функциясы

$F(x,y,\lambda) = xy$ көрүнүштө болуп, экинчи тартиптеги туундулары $\mathrm{M}_0(0;0)$ чекитинде: $\mathrm{A} = F''_{xx} = 0$, $\mathrm{B} = F''_{xy} = 1$, $\mathrm{C} = F''_{yy} = 0$ маанилерине ээ болуп, $D(0,0) = AC - B^2 = -1 < 0$ терс болгондуктан, $F(x,y)$ эки өзгөрүлмөлүү функциясын экстремумдарын жашашы үчүн жетиштүү шарттын (10.6 – теорема, 3) – бүтүм) негизинде, $\mathrm{M}_0(0;0)$ чекитинде экстремумга ээ болбойт. Бирок $u = xy$ функциясы $y - x = 0$ же $y = x$ түзүндө (L ийрисинде), $u = x^2$ функциясына айланып, чокусу $\mathrm{M}_0(0;0)$ чекитинде болгон парабола катарында, ушул түздө жайгашкан $\mathrm{M}_0(0;0)$ чекитинде шарттуу экстремумга (минимумга) ээ болорун көрөбүз.

Лагранждын көбөйтүүчүлөр методу менен жалпы n өзгөрүлмөлүү

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (m < n) \qquad (10.58)$$

байланыш теңдемесин канааттандыруучу шартуу экстремумун табуу үчүн :

1) Лагранждын жардамчы

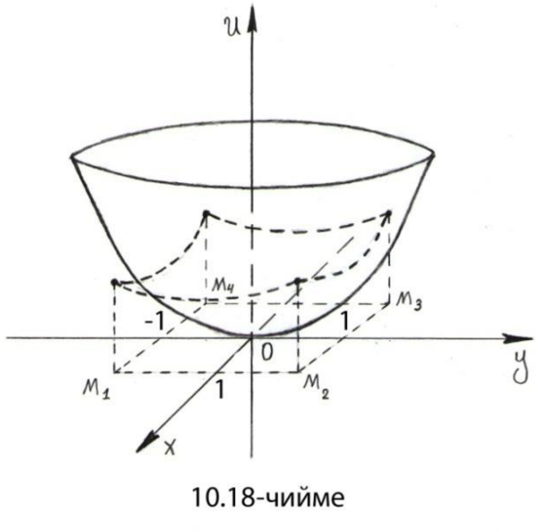
$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) +$

$+\lambda_2\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын түзөбүз. Мында $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_m -$ аныктала элек белгисиз коэффициенттер (сандар).

2) $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын жекече туундуларын нөлгө теңдештирген жана (10.58) шарттарын камтыган $x_1, x_2, \dots, x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_m$, бардыгы болуп $m+n$ белгисиздүү, $m+n$ теңдемелер системасын түзөбүз. Түзүлгөн теңдемелер системасы биргелешкен болсо, анын чечимдери: $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots, \lambda_m -$ коэфициенттери жана экстремумга шектелген чекиттин $\mathrm{M}_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ координаталары болушат. Аныкталган шектелген чекиттин берилген $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функцияга шарттуу экстремум (максимум же минимум) болор же болбосу, Лагранждын жардамчы функциясына (10.52) эрежесин колдонуу менен, $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясын шартсыз экстремум чекитин аныктоо менен ишке ашырылат, б.а. M_0 чекити Лагранждын функциясына шартсыз экстремум чекити болсо, анда $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функциясына шарттуу экстремум чекити болот. Айрым учурларда физикалык абалдарды чагылдыруу жана геометриялык сүрөттөлүштөрү боюнча функцияны мүнөздөөчү - маалыматтарга таянып, шарттуу экстремумдарын аныкташат.

10.9.3 Көп өзгөрүлмөлүү үзгүлтүксүз функциялардын эң чоң жана эң кичине маанилери

Кандайдыр бир туюк жана чектелген $\overline{\mathrm{D}}$ областында үзгүлтүксүз болгон $u = f(x, y)$ функциясын эң чоң $\left(\sup\limits_{(x;y)\in\overline{\mathrm{D}}}\{f(x,y)\}\right)$ жана эң кичине $\left(\inf\limits_{(x;y)\in\overline{\mathrm{D}}}\{f(x,y)\}\right)$ маанилерин табуу талап кылынсын дейли. Үзгүлтүксүз функциялардын касиеттерин бирин баяндаган Вейерштрасстын теоремасы боюнча, бул функция $\overline{\mathrm{D}}$ областын чекиттеринде өзүнүн эң чоң жана эң кичине маанилерин кабыл алышы керек. Эгерде функция $\overline{\mathrm{D}}$ областында



10.18-чийме

эң чоң (эң кичине) маанисине ички чекиттердин бири болгон $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекитинде жетсе, анда $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекити $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы $u = f(x, y)$ функциясын экстремум (максимум же минимум) чекиттерин бири болорун көрөбүз. Ал эми $\mathrm{M}_0(x_0; y_0)$ чекити $\overline{\mathrm{D}}$ областын чек арасында жайгашып калса, анда бул чекит $u = f(x, y)$ функциясын чек арада жайгашкан деген шартты канааттандырган чекиттердеги эң чоң (эң кичине) маанилерин бири болушу мүмкүн. Ошентип

$u = f(x, y)$ функциясын $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы эң чоң (эң кичине) маанилерин табуу үчүн:

1) $u = f(x, y)$ функциясын экстремумга шектелген же

$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасын канааттандырган чекиттерди табабыз.

2) Табылган шектүү чекиттердеги функциянын маанилерин эсептейбиз жана чек ара чекиттериндеги функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин табабыз.

Аларды салыштырып : эң чоңун $u = f(x, y)$ функциясын $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы эң чоң мааниси, ал эми эң кичинесин $u = f(x, y)$ функциясын $\overline{\mathrm{D}}$ областындагы эң кичине мааниси дейбиз.

Мисалы, $u = x^2 + y^2$ функциясын

$\overline{\mathrm{D}} = \{(x, y) | -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$ областындагы эң чоң жана эң кичине маанилерин табалы (10.18 – чийме).

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv 2x = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 2y = 0 \end{cases}$ теңдемелер системасынан $\mathrm{M}_0(0; 0)$ шектүү чекити табылат.

2) $u(0{,}0) = 0^2 + 0^2 = 0 -$ шектүү чекитиндеги мааниси функцияга абсолюттук минимум экенин билебиз;

3) $\overline{\text{D}}$ төрт бурчтугун төрт жагы тең чек арасы болгондуктан, ар бир жагындагы функциянын шарттуу экстремумдарын жана тиешелүү жактардын учтарындагы функциянын маанилерин эсептейли:

$\Gamma_1 = \{x = 1,\ -1 \le y \le 1\}$ – жагындагы чек арадагы чекиттерде $u = x^2 + y^2$ функциясы, $u = 1 + y^2$ бир өзгөрүлмөлүү функциясына айланып,

$\frac{\partial u}{\partial y} \equiv 2y = 0$ шартынан, $y = 0$ шектүү чекитине ээ болот,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 > 0$ оң болгондуктан, бул чекитте $u = 1 + y^2$ функциясы $u_{min.} = 1 + 0^2 = 1$ маанисине ээ болот. Ал эми Γ_1 жагынын $\text{M}_1(1; -1)$, $\text{M}_2(1; 1)$ учтарында болсо,

$u(1;-1) = (-1)^2 + 1^2 = u(1;1) = 1^2 + 1^2 = 2$ маанисин алат ;

$\Gamma_2 = \{y = 1,\ \ -1 \le x \le 1\} -$ жагындагы чек ара чекиттеринде

$u_{min.} = (x^2 + 1)_{min.} = 1$, учтарында $u(\text{M}_2) = u(\text{M}_3) = 2$;

$\Gamma_3 = \{x = -1,\ \ -1 \le y \le 1\} -$ жагында $u_{min.} = (1 + y^2)_{min.} = 1$, учтарында $u(\text{M}_3) = u(\text{M}_4) = 2$;

$\Gamma_4 = \{y = -1,\ -1 \le x \le 1\} -$ жагындагы чек ара чекиттеринде

$u_{min.} = (x^2 + 1)_{min.} = 1$, учтарында $u(\text{M}_4) = u(\text{M}_1) = 2$;

$u = x^2 + y^2$ функциясын абсолюттук минимумун, төрт бурчтуктун жактарындагы же чек ара сызыктарындагы шарттуу минимумдарын, жактардын учтарындагы же төрт бурчтуктун чокуларындагы маанилерин салыштырып көрүп, функция эң чоң маанилерге $\overline{\text{D}} -$ төрт бурчтугунун төрт чокусундагы

$\sup\limits_{(x;y)\in\overline{\text{D}}} \{x^2 + y^2\} = max\{u(\text{M}_1), u(\text{M}_2), u(\text{M}_3), u(\text{M}_4)\} = 2$ чек ара чекиттеринде, ал эми эң кичине маанисине

$\inf\limits_{(x;y)\in\overline{\text{D}}} \{x^2 + y^2\} = 0^2 + 0^2 = 0$, $\overline{\text{D}} -$ төрт бурчтугунун ички O(0; 0) чекитинде жетерине күбө болобуз.

Көнүгүүлөр

10.1 Төмөндөгү функциялардын биринчи, экинчи тартиптеги бардык жекече туундуларын жана дифференциалдарын тапкыла.

1) $u = x^2\,y - x\,y^2 + 3$; 2) $u = xy - \frac{y}{x}$; 3) $u = (x^2 + y^2)^3$;

3) $u = x - 3\,\sin y$; 4) $u = \ln(x^2 + y)$; 5) $u = \left(\frac{y}{x}\right)^x$; 6) $u = \frac{x}{y}\,e^{xy}$;

7) $u = \frac{2x+3y}{x-y}$; 8) $x = \rho\,\cos\varphi$; 9) $u = arctg\sqrt{xy}$;

10) $u = arc\sin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

Жооптору: 1) $du = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$, $d^2u = 2y\,dx^2 + 4(x-y)dxdy - 2xdy^2$; 2) $du = \left(y + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(x - \frac{1}{x}\right)dy$;

$d^2u = -\frac{2y}{x^3}\,dx^2 + 2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx\,dy$; 3) $du = dx - 3\,\cos y\,dy$,

$d^2u = 3\,\sin y\;d^2y$;

4) $du = \frac{2x\,dx}{x^2+y} + \frac{dy}{x^2+y}$, $d^2u = \frac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}\,dx^2 - \frac{4x}{(x^2+y)^2}\,dx\,dy - \frac{dy^2}{(x^2+y)^2}$;

5) $du = \left[\left(\frac{y}{x}\right)^x \ln\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^x\right]dx + \left(\frac{y}{x}\right)^{x-1}dy$,

$d^2u = \left[\left(\frac{y}{x}\right)^x\left(\ln\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right]dx^2 + \frac{x-1}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^{x-2}dy^2 +$

$+2\left(\frac{y}{x}\right)^{x-1}\left(\ln\frac{y}{x} - \frac{x-1}{x}\right)dx\,dy$;

6) $du = e^{xy}\left[\left(\frac{1}{y} + x\right)dx + \frac{x}{y}\left(x - \frac{1}{y}\right)dy\right]$,

$d^2u = e^{xy}\left[(1 + xy)dx^2 + 2\left(\frac{x}{y} + x - \frac{1}{y^2}\right)dx\,dy + \left(x^2 - \frac{2x}{y} + \frac{2}{y^2}\right)\frac{x}{y}dy^2\right]$;

7) $du = \frac{5}{(x-y)^2}\,(-ydx + xdy)$, $d^2u = \frac{5}{(x-y)^3}\,[2ydx^2 - (x+y)dxdy + 2xdy^2]$;

8) $dx = \cos\varphi\,d\rho - \rho\sin\varphi\,d\varphi$, $d^2x = -2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi - \rho\cos\varphi\;d^2\varphi$;

9) $du = \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}\,(1+xy)}$,

$d^2u = \frac{-1}{4\,(1+xy)\sqrt{xy}} \left[\frac{3xy+1}{xy(1+xy)} \, (y^2dx^2 + x^2dy^2) - \frac{3xy-1}{1+xy} \, dxdy \right];$

10) $du = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \, (-xy\,dx + dy - yz\,dz).$

10.2 $f(x,y) = y\sqrt[3]{x}$ функциясын $f'_x\,(1;\ 1)$, $f'_y\,(1;\ 1)$, $f''_{xx}\,(1;\ 1)$, $df(1;1)$

маанилерин тапкыла.

Жооптору: $f'_x\,(1;\ 1) = \frac{1}{3}$, $f'_y\,(1;\ 1) = 1$, $f''_{xx}\,(1;\ 1) = -\frac{2}{9}$,

$df(1;1) = \frac{1}{3}dx + dy.$

10.3 Эгерде $\begin{cases} x = r^2\cos\varphi, \\ y = r^2\sin\varphi \end{cases}$ болсо, анда $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ аныктагычын эсептегиле.

10.4 Дифференциалдын инварианттуулугун пайдаланып, функциялардын толук дифференциалдарын тапкыла.

1) Эгерде $x = t^2 + 1$, $y = t^3$ болсо, $u = xy\,arct\text{g}\,xy$ функциясын;

2) $u = f(x+y+z\,,\ x^2+y^2+z^2)$ функциясын.

Жооптору:

1) $du = \left\{2t\,\left[t^3\,arct\text{g}(t^5+t^3) + \frac{t^8+t^6}{1+(t^5+t^3)^2}\right] + 3t^2\left[(t^2+1)arct\text{g}(t^5 + \right.\right.$

$\left.\left. + t^3) + \frac{t^3\left(t^2+1\right)^2}{1+\ (t^5+t^3)^2}\right]\right\}\,dt;$

10.5 Төмөндөгү $u(x,y)$ айкын эмес функцияларын жекече туундуларын жана толук дифференциалдарын тапкыла:

a) $u^3 + 3x^2u = 2xy$; b) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$;

c) $u\ \ln(x+u) - \frac{xy}{u} = 0$; d) $x + y + u = e^{-(x+y+u)}$;

Жооптору. a) $du = \frac{(2y-6xu)dx+2xdy}{3(x^2+u^2)}$; b) $du = \frac{(2-x)dx+2ydy}{u+1}$;

c) $du = \frac{[u^3 - yu(x+u)]dx + xu(x+u)dy}{u^2(x+u)\ln(x+u) + u^3 + xy(x+u)}$; d) $du = -dx - dy$.

10.6 Төмөндөгү теңдемелер менен берилген айкын эмес функциялардын биринчи жана экинчи тартиптеги жекече туундуларын жана толук дифференциалдарын тапкыла.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; b) $\frac{x}{u} = \ln\frac{x}{y}$;

c) $5(x^2 - 2y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz) = 72$;

Жооптору. a) $dz = \frac{xdx + ydy}{1-z}$, $d^2z = \frac{1-z+x^2}{(1-z)^2}\,dx^2 + \frac{2xy}{(1-z)^3}\,dxdy -$

$-\frac{1-z+y^2}{(1-z)^2}\,dy^2$; b) $du = \frac{yudx + u^2dy}{y(x+u)}$, $d^2u = -\frac{u^2(ydx - xdy)}{y^2(x+u)^3}$;

c) $dz = -\frac{(5x-y-z)dx + (5y-x-z)dy}{5z-x-y}$,

$$d^2z = \frac{(5x-y-z)(5z'_x - 1) - (5 - z'_x)(5z-x-y)}{(5z-x-y)^2}\,dx^2 +$$

$$+ 2\frac{(1+z'_y)(5z-x-y) + (5z'_y - 1)(5x-y-z)}{(5z-x-y)^2}\,dxdy +$$

$$+ \frac{(5z'_y - 1)(5y-x-z) - (5 - z'_y)(5z-x-y)}{(5z-x-y)^2}\,dy^2.$$

10.7 Тейлордун формуласы менен төмөндөгү функцияларды экинчи тартиптеги калдык мүчөсүнө чейин ажыратып жазгыла.

a) $f(x,y) = \frac{1}{x-y}$; b) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$; c) $f(x,y) = \ln(x-2y)$;

d) $f(x,y) = e^{x+y}$; e) $f(x,y) = arc\cos\frac{x}{y}$.

Жооптору. a) $\Delta f = \frac{\Delta y - \Delta x}{(x-y)^2} + \frac{\Delta x^2 - 2\Delta x\Delta y + \Delta y^2}{(x-y)^3} + R_2$;

b) $\Delta f = \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{x+y}} - \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \Delta y^2}{8(x+y)^{\frac{3}{2}}} + R_2$;

c) $\Delta f = \frac{\Delta x - 2\Delta y}{x-2y} - \frac{\Delta x^2 - 4\Delta x\Delta y + 4\Delta y^2}{2(x-2y)^2} + R_2$;

d) $\Delta f = e^{x+y}(\Delta x + \Delta y) + e^{x+y}\frac{(\Delta x+\Delta y)^2}{2} + R_2$;

e) $\Delta f = -\frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(y\Delta x - x\Delta y)(xy\Delta x - 2y^2\Delta y + x^2\Delta y)}{y^2(y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} + R_2$.

10.8 $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ функциясын $(1;1;1)$ чекитин чеке белинде Тейлордун формуласы боюнча ажыраткыла.

Көрсөтмө: Тейлордун формуласын дифференциалдык формада жазылышын пайдалангыла, анткени ал жалпы n өзгөрүлмөлүү функциялар үчүн бирдей формада жазылат.

Жообу. $f(x,y,z) = 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) -$
$-(x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 -$
$-3(x-1)(y-1)(z-1)$.

10.9 Төмөндөгү функциялар менен берилген беттерге, көрсөтүлгөн чекиттер аркылуу жүргүзүлгөн жаныма тегиздикер менен нормаль түздөрдүн теңдемелерин жазгыла.

a) $z = xy$ бетине (1; 1; 1) чекитинен; b) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$

бетине $(1;2;-1)$ чекитинен; c) $xy^2 + z^3 = 12$ бетине $(1;2;2)$ чекитинен;

d) $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$ бетине (2; 1; 2) чекитинен;

e) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ бетине $(x_0; y_0; z_0)$ чекитинен;

f) $z = \sin\frac{y}{x}$ бетине $(1;\pi;0)$ чекитинен.

Жооптору. a) $x + y - z - 1 = 0,\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$;

b) $x + 11y + 5z - 187 = 0,\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$;

c) $x + y + 3z = 9,\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$;

d) $3(x-2) + 4(y-1) + 6(z-2) = 0,\ \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{6}$;

e) $\frac{a^2}{x_0}(x - x_0) - \frac{b^2}{y_0}(y - y_0) - \frac{c^2}{z_0}(z - z_0) = 0$, $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

f) $z = -y + \pi x,\ \frac{x-1}{-\pi} = \frac{y-\pi}{1} = \frac{z}{1}$.

10.10 Эки өзгөрүлмөлүү функциялардын экстремумдарын тапкыла.

1) $u = x^3y^2(6 - x - y)$; 2) $u = x^3 + y^3 - 9xy + 27$;

3) $u = xy(1 - x - y)$;

4) $u = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$. Мында $0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$;

5) $u = x\, e^{y + x \sin y}$.

Жооптору. 1) (3; 2) – максимум чекити ; 2) (3; 3) – минимум чекити;

3) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) -$ максимум чекити; 4) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right) -$ максимум чекити ;

5) Экстремуму жок.

10.11 Берилген байланыш теңдемелерин канааттандырган шарттуу экстремумдарын тапкыла.

1) $u = e^{xy}$ функциясын $x + y = 1$ болсо;

2) $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ функциясын $x + y = 2a \quad (a > 0)$ болсо;

3) $u = xy$ функциясын $x^2 + y^2 = 1$ болсо;

4) $u = x + y + z$ функциясын $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1 \ \ (x > 0,\ y > 0)$ болсо;

5) $u = x^2y^2z^4$ функциясын $2x + 3y + 4z = 0$ болсо.

Жооптору. 1) $\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) -$ максимум ; 2) $(a; a) -$ минимум ;

3) $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) -$ максимум, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right) -$ минимум ;

4) $\left(d\sqrt{a}; d\sqrt{b}; d\sqrt{c}\right) -$ минимум чекити. Мында $d = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$;

5) (0; 0; 0) – минимум.

10.12 Көрсөтүлгөн областтарда төмөндөгү функциялардын эң чоң жана эң кичине маанилерин тапкыла.

1) $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x + y \le 1$ областында $u = x - 2y - 3$ функциясын;

2) $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ областында $u = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$ областында $u = x^2 + y^2$ функциясын;

4) $x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \le 1$ областында $u = \frac{xy}{2} - \frac{x^2y}{6} - \frac{xy^2}{8}$;

5) $x^2 + y^2 \le z \le 1$ областында $u = x + y + z$ функциясын.

Жооптору. 1) $\sup\{u\} = -2$, $\inf\{u\} = -5$; 2) (0; 1) жана (1; 1) чекиттеринде $\sup\{u\} = 17$, ал эми $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ чекитинде $\inf\{u\} = -\frac{17}{4}$;

3) $(\pm a; 0)$ чекиттеринде $\sup\{u\} = a^2$, ал эми $(0;\ \pm b)$ чекиттеринде $\inf\{u\} = b^2$;

4) $\left(1; \frac{4}{3}\right)$ чекитинде $\sup\{u\} = \frac{2}{9}$, ал эми бардык чек ара чекиттеринде $\inf\{u\} = 0$;

КОЛДОНУЛГАН АДАБИЯТТАР

1. Асанов А, Булатаева В.В. Руководство к решению задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Бишкек: Университет «Дастан», 1999, - 88 с.

2. Бекбоев И. Жогорку математиканын жалпы курсу. – Бишкек: «Педагогика», 2000.

3. Бөрүбаев А.А., Шабыкеев Б., Бараталиев К. Математикалык анализ. 1- 2 – бөлүктөр. – Бишкек: «Мектеп», 2002.

4. Каримов С. Элементардык функциялар. – Фрунзе: «Мектеп»,1971, - 120 б.

5. Сопуев С. Методические указания и упражнения по теории аналитических функций. 1- 2 – части. – Ош: Ошский госпединститут, 1989, - 9,75 п.л.

6. Рафатов Р, Асанов А. Комплекс сандар, функциялар жана дифференциалдык теңдемелер. – Бишкек: «Манас» университети, 2007, - 230 б.

7. Усубакунов Р. Дифференциальдык жана интегралдык эсептөөлөр. 1 – 2 – бөлүктөр. – Фрунзе:

8. Демидович Б.П. и другие. Сборник задач по математике для втузов. – Москва: «Наука», 1981, - 464 с.

9. Зельдович Я.Б. Высшая математике для начинающих. – Москва: «Наука», 1970, - 560 с.

10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: «Наука», 1968, - 497 с.

11. Краснов М.Л. и другие. Вся высшая математика, т -1-2. – Москва: «УРСС», 2002, - 328 б.

12. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М: «Наука»,

1974, - 450 с.

13. Атаманов Э.Р., Мамаюсупов М.Ш.. Неклассические задачи для псевдопараболических уравнений. – Бишкек: «Илим», 1990, - 100 с.

14. Мамаюсупов М.Ш. Инженердик адистиктерде математиканы окутууга коюлуучу айрым талаптар жөнүндө. – Бишкек: Журн. «Известия КАО», 2005, № 3, - с. 80-81.

15. Мамаюсупов М.Ш. Студенттерге жаратылыш кубулуштарын математиканын тилинде түшүндүрүүнү үйрөтөлү. – Ош: Журн. ОшКУУ «Наука. Образование. Техника», 2007, № 3, - с. 161-163.

16. Мамаюсупов М.Ш. Студенттердин кесиптик билимдерин өздөштүрүүсүндө математиканын орду. – Ош: Журн. «Вестник ОшГУ», 2008, № 1, - с. 74-77.

17. Мамаюсупов М.Ш. Жогорку математиканы окутуу программасына айрым өзгөртүүлөрдү киргизүү жөнүндө. – Ош: Журн. «Известия ОшТУ», 2008, - с. 188-192.

18. Аттокурова А. Дж., Барышникова Т.Л., Мамаюсупов М.Ш. Математиканы интерактивдүү ыкма менен окутуу маселелери. – Ош: «ЦП. Максимум», 2008, - 94 б.

Мамаюсупов Маккамбай Шеранович

ЖОГОРКУ МАТЕМАТИКА БОЮНЧА ОКУМА

(2 – бөлүк)

Электрондук окуу китеп

Ош мамлекеттик университетинин жогорку математика кафедрасынын 2010-жылдын 25- майындагы чечими менен электрондук окуу китеби катарында сунушталган.

Чиймелерин сызган К.Х. Абдиваитов.

Көлөмү 344 бет.